А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

1972 ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА Том 57

И. А. БАТАЛИН, Е. С. ФРАДКИН

БИЛОКАЛЬНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы широкое применение получил функциональный метод в квантовой теории поля как для построения S-матрицы в сложных нелинейных взаимодействиях, так и для построения вычислительного аппарата вне рамок теории возмущений. Адекватность этого метода для описания систем с бесконечным числом степеней свободы (а именно с такими системами мы имеем дело в современной квантовой теории поля) позволила получить в наиболее компактной форме решение для S-матрицы (и для производящего функционала всех функций Грина) взаимодействующих полей. Это операторное (континуальное) решение [1] записано в терминах функциональных производных по локальным источникам бозе- и ферми-полей или в виде континуального интеграла по локальным динамическим переменным (по «классическим» полям). Операторное решение для S-матрицы в сочетании с найденным в [2] операторным (континуальным) решением для функции Грина в произвольном внешнем поле позволило далеко продвинуться в решении проблемы построения вычислительного аппарата (построение модифицированной теории возмущений [2] для нахождения функций Грина и сечений процессов), существенно выходящей за рамки обычной теории возмущений.

Наиболее трудной проблемой на пути реализации полной программы построения вычислительного аппарата вне рамок теории возмущений является проблема корректного учета поляризационных диаграмм. В настоящей статье будет построена другая модификация функционального решения для S-матрицы, которая позволит далеко продвинуться в решении проблемы корректного учета поляризационных диаграмм. В этой новой функциональной формулировке теории поля роль «динамических» переменных будут играть не сами поля φ, а некоторые новые «динамические» переменные $Q(x, y)$, $Q'(x, y)$, ассоциированные с парной комбинацией полей в точках x и y (билокальные переменные). В то время как обычное операторное решение для S-матрицы записано в терминах функциональных производных по источникам, например бозе-поля, в предложенной здесь билокальной формулировке решение для S-матрицы получено в терминах функциональной производной по билокальному источнику парной комбинации бозе-полей в двух точках (см. разд. 1, (60)). Остановимся вкратце на основных результатах настоящей статьи.

Первая часть посвящена построению билокальной формулировки в квантовой теории поля. Показано, что из обычного операторного решения [1] для производящего функционала введением добавочного взаимодействия (типа $\varphi(x)Q(x, y)\varphi(y)$) билокального источника $Q(x, y)$ с парой бозе-полей в точках x и y можно получить операторное решение для производящего функционала в терминах производных только по билокальным источникам (см. разд. 1, (61)—(62)). При этом локальные источники к ферми- и бозе-полям входят в полученном решении параметрически явно (т. е. все функциональные производные по этим переменным явно вычислены, остались лишь производные по билокальным переменным). Существенное упрощение возникает при изучении производящего функционала при наличии только бозе-частиц, взаимодействие между которыми и осуществляется за счет интересующих нас поляризационных диаграмм. В этом случае мы имеем еще добавочное упрощение для теорий, для которых имеет место теорема Фарри (т. е. все поляризационные диаграммы с нечетным числом внешних бозе-частиц отсутствуют). Как известно, к этому классу теории относятся модели взаимодействия, наиболее интересные с точки зрения современной физики (квантовая электродинамика, псевдоскалярная теория с зарядово-симметричным псевдоскалярным взаимодействием, псевдоскалярная теория с псевдовекторным взаимодействием и т. д.). В этом случае производящий функционал бозе-частиц, четный по локальным источникам бозе-полей, и все функции Грина бозе-частиц могут быть получены из вида производящего функционала (см. разд. 1, (64) — (65)) при отсутствии локальных источников путем дифференцирования производящего функционала (см. разд. 1, (66)) по билокальному источнику. Поэтому дальнейшее рассмотрение и проводится с производящим функционалом, зависящим лишь от билокальных переменных. Примечательной особенностью билокальной формулировки является большая по сравнению с обычной формулировкой симметрии зависимость от бозе- и ферми-переменных.

Так, в частности, в обычное функциональное решение для S-матрицы [1] входит лишь фермиевский детерминант (т. е. детерминант одночастичной функции Грина ферми-частиц, и он выдает все поляризационные диаграммы), в билокальной формулировке наряду с детерминантом ферми-частиц в решение для S-матрицы входит также детерминант бозе-частиц (одночастичной функции Грина бозе-частиц во внешнем билокальном поле), и здесь оба детерминанта в совокупности выдают все поляризационные диаграммы. Это обстоятельство и обеспечивает в новом формализме большую по сравнению с обычной формулировкой симметрию также в форме записи системы функциональных уравнений для квантованных функций Грина. Эта система функциональных уравнений в билокальной формулировке получена во второй части данной работы (см. разд. 2, (9) — (11)).

Последняя часть (разд. 3) данной работы посвящена построению вычислительного аппарата для учета поляризационных диаграмм вне рамок теории возмущений. Здесь наиболее существенными этапами являются получение операторного решения для функции Грина бозе-частиц в произвольном внешнем билокальном поле $Q\ (x,\ y)$ и получение системы интегральных уравнений для ферми-частиц на «траекториях» бозе-частиц, с помощью которых суммируется вклад поляризационных диаграмм. То обстоятельство, что внешнее поле здесь имеет нелокальный характер, приводит к тому, что операторное решение для функции Грина бозе-частиц получено в терминах функциональных производных по источникам как координат, так и импульсов (см. разд. 3, (19), (23)). В локальном же случае дифференцирование по источникам импульса проводится элементарно, и окончательное выражение можно записать в терминах производных лишь по источникам координат (усреднение по траекториям). Подставляя найденное решение для функции Грина бозе-частицы в операторное (континуальное) решение для производящего функционала и разлагая бозевский детерминант в ряд по функции Грина бозе-частицы, получаем замкнутое выражение для производящего функционала (см. разд. 3, (25)), в котором осталось лишь усреднение по «виртуальным траекториям» бозе-частиц. Примечательной особенностью полученного выражения является то обстоятельство, что в нем фермиевский детерминант учтен точно; однако для его нахождения необходимо найти функцию Грина ферми-частиц с ядрами, сосредоточенными на «виртуальных траекториях» бозе-квантов. При этом, поскольку ядра этих уравнений сосредоточены на виртуальных траекториях бозонов, удается получить производящую систему линейных интегральных уравнений на траекториях (см. разд. 3, (36) — (42), (45), (46)). Следовательно, вместо того чтобы решить уравнение для функции Грина в 4-мерном пространстве, достаточно здесь решить систему интегральных уравнений в одномерном пространстве (на совокупности траекторий). В простейшем случае, когда мы интересуемся поведением бозе-частиц вблизи массовой поверхности (что соответствует в терминах собственного времени $\alpha \to \infty$), эта система уравнений на «траекториях» (после проведения процедуры осреднения в ядрах) переходит в систему уравнений Винера — Хопфа (см. разд. 3, (62) — (63)).

Полученные результаты применены к наиболее простому случаю мезон-мезон-взаимодействия $\lambda/4\ (\varphi_i^2)^2$. В частности, для одночастичной функции Грина мезона уравнение Винера — Хопфа (85), разд. 3, решено и предложенная программа учета поляризационных диаграмм проведена наиболее полно (см. разд. 3, (100)).

Кратко остановимся на процедуре осреднения по «траекториям» бозе-частиц (см. разд. 3, (19)). Наиболее целесообразным нам представляется проведение процедуры осреднения уже в ядрах интегральных уравнений (см. разд. 3, (66) — (68), (80), (81)—(84)). Здесь возможно также развить метод модифицированной теории возмущений, первое приближение которого суммирует вклады фейнмановских диаграмм, в знаменателях которых опущены корреляции между различными импульсами виртуальных частиц (приближение $k_i k_j$ [2]). Однако в нашем случае эта процедура как бы касается знаменателей бозе-частиц (знаменатели ферми-частиц учитываются точно, в то время как в обычном формализме (см. [2]) это приближение относилось к знаменателям ферми-частиц), и потому этот формализм более приспособлен для корректного учета поляризационных диаграмм. Отметим, что удается развить билокальный формализм относительно ферми- и бозе-полей одновременно. Соответствующее исследование будет опубликовано в другом месте. Несколько в ином аспекте теория с нелокальными источниками рассмотрена также в работе [3].

1. Модифицированное представление для производящего функционала

Рассмотрим псевдоскалярную мезодинамику со связью типа Юкавы без производных; лагранжиан этой теории имеет вид

$$L = L_0 + L_{int} + L_{ext}, \tag{1}$$

где

$$L_0 = -\frac{1}{2}(\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\overline{\psi}\gamma_\mu\psi) - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\right)^2 + \chi^2\varphi_j^2\right], \tag{2}$$

$$L_{int} = ig\overline{\psi}\gamma_5'\tau_j\psi\varphi_j + \frac{\lambda}{4}(\varphi_j^2)^2, \tag{3}$$

$$L_{ext} = \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + J\varphi, \tag{4}$$

$$[\gamma_\mu, \gamma_\rho]_+ = 2\delta_{\mu\rho}, \quad \mu, \rho = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{5}$$

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu^+, \tag{6}$$

$$[\tau_i, \tau_j]_+ = 2\delta_{ij}, \tag{7}$$

$$[\tau_i, \tau_j]_- = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k, \tag{8}$$

$$i, j, k = 1, 2, 3.$$

Здесь ψ, $\bar\psi = \psi^+\gamma_4$ — поле нуклонов; φ_j ($j = 1, 2, 3$) — мезонное поле, $\bar\eta$, η — антикоммутирующие источники ψ, $\bar\psi$-полей, J — коммутирующий источник мезонного поля.

Производящий функционал квантовых функций Грина в данной теории имеет вид [1]

$$CZ = \exp\left\{i\int L_{int}\left[(-i)\frac{\delta}{\delta\eta}, (-i)\frac{\delta}{\delta\bar\eta}, (-i)\frac{\delta}{\delta J}\right] d^4x\right\} Z_0[\bar\eta, \eta, J], \tag{9}$$

где $L_{int}\left[(-i)\frac{\delta}{\delta\eta}, (-i)\frac{\delta}{\delta\bar\eta}, (-i)\frac{\delta}{\delta J}\right]$ получается из (3) подстановками

$$\begin{aligned} \bar\psi &\to (-i)\frac{\delta}{\delta\eta}, \\ \psi &\to (-i)\frac{\delta}{\delta\bar\eta}, \\ \varphi &\to (-i)\frac{\delta}{\delta J}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$Z_0[\bar\eta, \eta, J] = \exp\left\{i\int d^4x d^4y\left[\bar\eta(x) G_0(x-y)\eta(y) + \frac{1}{2}J(x)D_0(x-y)J(y)\right]\right\}, \tag{11}$$

$G_0(x-y)$ и $D_0(x-y)$ — свободные причинные пропагаторы соответственно нуклонов и мезонов:

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m - i\varepsilon)G_0(x-y) = \delta(x-y), \tag{12}$$

$$(-\Box + \varkappa^2 - i\varepsilon)D_0(x-y) = \delta(x-y). \tag{13}$$

Эквивалентное (9) представление для Z-функционала в виде функционального интеграла имеет вид

$$CZ[\bar\eta, \eta, J] = \int D\bar\psi D\psi D\varphi \exp\left\{i\int L[\bar\psi, \psi, \varphi]\, d^4x\right\}, \tag{14}$$

причем $L[\bar\psi, \psi, \varphi]$ дается (1) — (4) и C — нормировочная постоянная, равная значению правой части при $\bar\eta = \eta = J = 0$. Проводя в (9) дифференцирование по нуклонным переменным $\bar\eta$, η, получаем [1]

$$\begin{aligned} CZ[\bar\eta, \eta, J] = \exp\left\{i\int d^4x d^4y \bar\eta(x) G\left(x, y \,\middle|\, -i\frac{\delta}{\delta J}\right)\eta(y) + i\frac{\lambda}{4}\int\left(\frac{\delta^2}{\delta J_i(x^2)}\right)^2 d^4x + \right. \\ \left. + \Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\} \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x) D_0(x-y) J(y)\right\}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $G(x, y \mid \varphi)$ — функция Грина нуклона во внешнем мезонном поле:

$$\begin{aligned} &[\gamma_\mu\partial_\mu + m - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j(x) - i\varepsilon]\, G(x, y \mid \varphi) = \\ &= G(x, y \mid \varphi)[-\gamma_\mu\partial_\mu + m - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j(y)] = \delta(x-y) \end{aligned} \tag{16}$$

или в операторной форме

$$(1 - igG_0\gamma_5\tau_j\varphi_j)\, G = G\,(1 - ig\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0) = G_0, \tag{17}$$

где G_0 — интегральный оператор, координатный матричный элемент которого совпадает с $G\,(x-y)$:

$$\langle x\,|\,G_0\,|\,y\rangle \equiv G_0\,(x-y), \tag{18}$$

и под φ_j понимается диагональный в x-представлении оператор с матричными элементами

$$\langle x\,|\,\varphi_j\,|\,y\rangle = \varphi_j\,(x)\,\delta\,(x-y). \tag{19}$$

Величина $\Pi\,(\varphi)$, входящая в (15), представляет собой лагранжиан детерминанта Фредгольма уравнения движения нуклона во «внешнем поле» $\varphi_j\,(x)$:

$$\Pi\,(\varphi) = \mathrm{Sp}\ln(1 - igG_0\gamma_5\tau_j\varphi_j) = \mathrm{Sp}\ln(1 - ig\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0). \tag{20}$$

Здесь Sp означает диагональное суммирование по индексам обычного и изотопического спина, а также интегрирование по переменным диагональных матричных элементов интегрального оператора в x-пространстве. Кроме того, в (20) явно учтена инвариантность детерминанта относительно преобразования подобия.

Записывая формальное решение уравнений (17) в виде

$$G = (1 - igG_0\gamma_5\tau_j\varphi_j)^{-1}\,G_0 = G_0\,(1 - ig\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0)^{-1}, \tag{21}$$

легко представить $\Pi\,(\varphi)$ таким образом [1]:

$$\Pi\,(\varphi) = -\,i\int_0^g \mathrm{Sp}\,\gamma_5\tau_j\varphi_jG\,(g')\,dg' = -\,i\int_0^g \mathrm{Sp}\,G\,(g')\,\gamma_5\tau_j\varphi_j dg'. \tag{22}$$

или в раскрытой форме

$$\Pi\,(\varphi) = -\,i\int_0^g dg'\int d^4x\,\mathrm{Sp}\,\gamma_5\tau_j\varphi_j\,(x)\,G\,(x, x\,|\,g'\varphi), \tag{23}$$

причем в (23) символ следа относится только к спинорным индексам и индексам изопространства.

Операторное представление (15) для производящего функционала имеет интегральный аналог, который получается, если провести в (14) интегрирование по $\bar\psi$, ψ [1]:

$$CZ\,[\bar\eta, \eta, J] = \int D\varphi\exp\Big\{i\int[\varphi_j\,(x)\,(\Box - \chi^2 + i\varepsilon)\,\varphi_j\,(x) + J_j\,(x)\,\varphi_j\,(x) +$$
$$+ \frac{\lambda}{4}\,(\varphi_j^2\,(x))^2]\,d^4x + i\int d^4xd^4y\bar\eta\,(x)\,G\,(x, y\,|\,\varphi)\,\eta\,(y) + \Pi\,(\varphi)\Big\}. \tag{24}$$

Покажем теперь, что величина $\Pi\,(\varphi)$ является четной функцией g. Мы имеем

$$e^{\Pi(\varphi)} = \mathrm{Det}\,G_0^{-1}\,\mathrm{Det}\,[\gamma_\mu\partial_\mu + m - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j]. \tag{25}$$

---

[1] Здесь использована интегральная параметризация логарифмической функции оператора k

$$\ln(1 + \lambda k) = \int_0^\lambda d\lambda' k\,(1 + \lambda' k)^{-1}.$$

Воспользуемся известным свойством детерминанта

$$\mathrm{Det}\, X = \mathrm{Det}\, X^T, \tag{26}$$

где X^T — транспонированная матрица.

Применяя это к второму сомножителю в правой части (25), получаем

$$\mathrm{Det}\,[\gamma_\mu\partial_\mu + m - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j] = \mathrm{Det}\,[(C\tau_2)^{-1}(\gamma_\mu\partial_\mu + m + ig\gamma_5\tau_j\varphi_j)\,C\tau_2] =$$
$$= \mathrm{Det}\,[\gamma_\mu\partial_\mu + m + ig\gamma_5\tau_j\varphi_j], \tag{27}$$

где C — матрица зарядового сопряжения.

При получении (27) были использованы следующие выражения для транспонированных величин:

$$\gamma_\mu^T = -C^{-1}\gamma_\mu C, \tag{28}$$

$$\gamma_5^T = C^{-1}\gamma_5 C, \tag{29}$$

$$\partial_\mu^T = -\partial_\mu\ (\text{так как } \langle x\,|\,\partial_\mu\,|\,y\rangle = \partial_\mu\delta(x-y)), \tag{30}$$

$$\tau_j^T = -\tau_2^{-1}\tau_j\tau_2, \tag{31}$$

$$\varphi_j^T = \varphi_j\ (\text{так как } \langle x\,|\,\varphi_j\,|\,y\rangle = \varphi_j(x)\,\delta(x-y)). \tag{32}$$

Таким образом, величину $\Pi(\varphi)$ можно представить в форме, явно учитывающей четную зависимость от φ:

$$\Pi(\varphi) \equiv [\Pi(\varphi) + \Pi(-\varphi)]\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln(1 + g^2G_0\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0\gamma_5\tau_l\varphi_l) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln(1 + g^2\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0\gamma_5\tau_l\varphi_lG_0), \tag{33}$$

причем оба представления в (33) конечно эквивалентны в силу инвариантности $\mathrm{Sp}\ln[X]$ относительно преобразования подобия.

Несколько другое представление для $\Pi(\varphi)$ можно получить, если предварительно «эрмитизировать» уравнения движения нуклона. В самом деле, из (27) следует

$$\mathrm{Det}\,(\gamma_\mu\partial_\mu + m - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j) = \mathrm{Det}\,[\gamma_5^+(\gamma_\mu\partial_\mu + m + ig\gamma_5\tau_j\varphi_j)\,\gamma_5] =$$
$$= \mathrm{Det}\,[-\gamma_\mu\partial_\mu + m + ig\gamma_5\tau_j\varphi_j], \tag{34}$$

т. е.

$$\mathrm{Sp}\,\ln(\gamma_\mu\partial_\mu + m - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln[-(\gamma_\mu\partial_\mu - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j)^2 + m^2], \tag{35}$$

и так как

$$(\gamma_\mu\partial_\mu - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j)^2 = \Box + ig\gamma_5\gamma_\mu\tau_j\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu} - g^2\varphi_j^2, \tag{36}$$

где

$$\langle x\,|\,\Box\,|\,y\rangle = \Box_x\delta(x-y) = \Box_y\delta(x-y), \tag{37}$$

$$\left\langle x\,\middle|\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\,\middle|\,y\right\rangle = \frac{\partial\varphi_j(x)}{\partial x_\mu}\,\delta(x-y), \tag{38}$$

$$\langle x\,|\,\varphi_j^2\,|\,y\rangle = \varphi_j^2(x)\,\delta(x-y), \tag{39}$$

получим

$$\mathrm{Sp}\ln(\gamma_\mu\partial_\mu + m - ig\gamma_5\tau_j\varphi_j) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ln\left(-\Box + m^2 - ig\gamma_5\gamma_\mu\tau_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu} + g^2\varphi_j^2(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln\Delta^{-1}(\varphi^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln\left(1 - ig\gamma_5\gamma_\mu\tau_j\Delta(\varphi^2)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln\Delta^{-1}(\varphi^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln\left(1 - ig\gamma_5\gamma_\mu\tau_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\,\Delta(\varphi^2)\right), \tag{40}$$

где

$$\Delta^{-1}(\varphi^2) = -\Box + m^2 + g^2\varphi_j^2 - i\varepsilon, \tag{41}$$

так что для $\Delta(x, y \mid \varphi^2) \equiv \langle x \mid \Delta(\varphi^2) \mid y\rangle$ имеем уравнение

$$(-\Box + m^2 + g^2\varphi_j^2(x))\,\Delta(x, y \mid \varphi^2) = \delta(x - y). \tag{42}$$

Далее [1]

$$\mathrm{Sp}\ln\left(1 - ig\gamma_5\gamma_\mu\tau_j\Delta(\varphi^2)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\right) = \mathrm{Sp}\ln\left[\gamma_5\left(1 - ig\gamma_5\gamma_\mu\tau_j\Delta(\varphi^2)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\right)\gamma_5\right] =$$
$$= \mathrm{Sp}\ln\left(1 + ig\gamma_5\gamma_\mu\tau_j\Delta(\varphi^2)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln\left(1 - g^2\gamma_\mu\gamma_\rho\tau_j\tau_l\Delta(\varphi^2)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\times\right.$$
$$\left.\times\,\Delta(\varphi^2)\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_\rho}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln\left(1 - g^2\gamma_\mu\gamma_\rho\tau_j\tau_l\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\,\Delta(\varphi^2)\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_\rho}\,\Delta(\varphi^2)\right). \tag{43}$$

Таким образом, будем иметь для $\Pi(\varphi)$ эквивалентные представления [2]

$$\Pi(\varphi) \equiv \Pi(Q) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ln G_+^{-1}(Q) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\ln\Delta^{-1}(Q) + \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\ln\,[G_+^{(1)}(Q)]^{-1}, \tag{44}$$

где $G_+(Q)$ и $G_+^{(1)}(Q)$ удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\,G_+(x, y \mid Q) + \int d^4y_1 g^2\gamma_5\tau_j G_0(x - y_1)\gamma_5\tau_i Q_{ji}(x, y_1)\,G_+(y_1, y) = \delta(x - y), \tag{45}$$

$$(-\Box + m^2 - i\varepsilon + g^2Q_{jj}(xx))\,G_+^{(1)}(x, y \mid Q) -$$
$$- g^2\gamma_\mu\gamma_\rho\tau_i\tau_j\int d^4y_1\Delta(x, y_1 \mid Q)\,\frac{\partial^2 Q_{ij}(x, y_1)}{\partial x_\mu\partial y_{1\rho}}\,G_+^{(1)}(y_1, y \mid Q) = \delta(x - y), \tag{46}$$

$$(-\Box + m^2 - i\varepsilon + g^2Q_{jj}(x, x))\,\Delta(x, y \mid Q) = \delta(x - y), \tag{47}$$

где введено обозначение

$$Q_{ij}(x, y) = \varphi_i(x)\,\varphi_j(y). \tag{48}$$

Введенные функции Грина $G_+(Q)$ и $G_+^{(1)}(Q)$ представляют собой соответственно четную относительно мезонного поля часть функции Грина

---

[1] Естественное разделение взаимодействия на орбитальную, спин-орбитальную и спиновую части относительно обычного и изотопического спина получается в (43) с учетом равенства

$$\gamma_\mu\gamma_\rho\tau_j\tau_l = (\delta_{\mu\rho} - i\sigma_{\mu\rho})(\delta_{jl} + i\varepsilon_{jls}\tau_s),$$

где

$$\sigma_{\mu\rho} = i/2\,[\gamma_\mu, \gamma_\rho].$$

[2] Несущественные члены типа $\mathrm{Sp}\ln G_0^{-1}$ могут быть включены в нормировку z-функционала.

$G(x, y \mid \varphi)$, удовлетворяющей (16), (17), и функции Грина $G^{(1)}(x, y \mid \varphi)$, связанной с $G(x, \mid y \mid \varphi)$ уравнением

$$G(x, y|\varphi) = (-\gamma_\mu \partial_\mu + ig\gamma_5\tau_j\varphi_j(x) + m)\, G^{(1)}(x, y) = \\ = G^{(1)}(x, y)(+\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + ig\gamma_5\tau_j\varphi_j(y) + m), \tag{49}$$

в силу которого

$$\left[-\Box + m^2 + g^2\varphi_j^2(x) - ig\gamma_5\gamma_\mu\tau_j \frac{\partial\varphi_j(x)}{\partial x_\mu}\right] G^{(1)}(x, y \mid \varphi) = \delta(x - y). \tag{50}$$

Мы видим, что все эффекты поляризации вакуума нуклонов произвольным внешним полем мезонов выражаются через мезонное поле в комбинации (48). Это естественно подсказывает мысль о переходе к «новым переменным» согласно (48) для формулировки всей теории в целом. Такая программа частично может быть реализована. Фактически это означает, что в терминах переменных (48) может быть представлен производящий функционал при выключенных источниках нуклонного поля ($\overline{\eta} = \eta = 0$). Если же $\overline{\eta}, \eta \neq 0$, то замкнутая формулировка в терминах переменных (48) не может быть получена и приходится вводить дополнительные переменные.

Чтобы пояснить это, представим формальные решения (21) в виде

$$G = (1 - igG_0\gamma_5\tau_j\varphi_j)^{-1}G_0 = (1 + g^2G_0\gamma_5\tau_i\varphi_iG_0\gamma_5\tau_j\varphi_j)^{-1}(1 + igG_0\gamma_5\tau_l\varphi_l)G_0 = \\ = G_+(Q) + G_+(Q)\,ig\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0 = G_0(1 - ig\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0)^{-1} = G_0(1 + \\ + ig\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0)(1 + g^2\gamma_5\tau_i\varphi_iG_0\gamma_5\tau_l\varphi_lG_0)^{-1} = G_+(Q) + igG_0\gamma_5\tau_j\varphi_jG_+(Q), \tag{51}$$

откуда получаем симметризованный вариант

$$G = G_+(Q) + \frac{ig}{2}\,[G_+(Q)\,\gamma_5\tau_j\varphi_jG_0 + G_0\gamma_5\tau_j\varphi_jG_+(Q)], \tag{52}$$

или в раскрытой форме

$$G(x, y \mid \varphi) = G_+(x, y \mid Q) + \frac{ig}{2}\int d^4z\,[G_+(x, z \mid Q)\,\gamma_5\tau_jG_0(z - y) + \\ + G_0(x - z)\,\gamma_5\tau_jG_+(z, y \mid Q)]\,\varphi_j(z). \tag{53}$$

Подставляя (44), (53) в (24), представим производящий функционал в виде

$$CZ[\overline{\eta}, \eta, J] = \int (D\varphi) \exp\left\{ i\int\left[\frac{1}{2}\varphi_j(x)(\Box - \varkappa^2 + i\varepsilon)\,\varphi_j(x) + J_j(x \mid Q)\,\varphi_j(x) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\lambda}{4}Q_{jj}^2(x, x)\right] d^4x + i\int d^4x\,d^4y\,\overline{\eta}(x)\,G_+(x, y \mid Q)\,\eta(y) + \Pi(Q)\right\}\Bigg|_{Q_{ij}(x,y)=\varphi_i(x)\varphi_j(y)}, \tag{54}$$

где

$$J_j(x \mid Q) = J_j(x) + \frac{ig}{2}\int d^4z\,d^4z'\,\overline{\eta}(z)\,[G_+(z, x \mid Q)\,\gamma_5\tau_jG_0(x - z') + \\ + G_0(z - x)\,\gamma_5\tau_jG_+(x, z' \mid Q)]\,\eta(z'). \tag{55}$$

Принимая во внимание тождество

$$F(Q)\big|_{Q_{ij}(x,y)=\varphi_i(x)\varphi_j(y)} \equiv F\left(\frac{\delta}{\delta Q}\right) \exp\left\{\int d^4x\,d^4y\,\varphi_i(x)\,Q_{ij}(x, y)\,\varphi_j(y)\right\}\Big|_{Q=0} \equiv \\ \equiv \exp\left\{\int d^4x\,d^4y\,\varphi_i(x)\,\frac{\delta}{\delta Q_{ij}(x, y)}\,\varphi_j(y)\right\} F(Q)\Big|_{Q=0}, \tag{56}$$

справедливое для произвольного функционала $F(Q)$, получаем из (54) [1]

$$CZ[\bar{\eta}, \eta, J] = \exp\left\{i \frac{\lambda}{4}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta Q_{jj}(x,x)}\right)^2 d^4x + \Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right) + \right.$$
$$\left. + i\int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) G_+\left(x, y \mid -i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\eta(y)\right\}\int(D\varphi)\exp\left\{i\int\left[\frac{1}{2}\varphi_j(x)(\Box - \chi^2 + i\varepsilon)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\ \varphi_j(x) + J_j\left(x \mid -i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\varphi_j(x)\right]d^4x\right\}\exp\left\{i\int d^4x d^4y \varphi_i(x) Q_{ij}(x,y)\varphi_j(y)\right\}\Big|_{Q=0}. \tag{57}$$

Входящий в (57) интеграл по φ-полю представим в виде

$$\exp\left\{-i\int\frac{\delta^2}{\delta Q_{ij}(x,y)\,\delta Q'_{ij}(x,y)}d^4x d^4y\right\}\int(D\varphi)\exp\left\{\frac{-i}{2}\int\varphi_i(x) D^{-1}_{ij}(x, y \mid Q)\times\right.$$
$$\left.\times\varphi_j(y)d^4x d^4y + i\int J_i(x \mid Q')\varphi_i(x)d^4x\right\}\Big|_{Q'=0}, \tag{58}$$

где

$$D^{-1}_{ij}(x, y \mid Q) \equiv \langle i; x \mid D^{-1}(Q) \mid j; y\rangle = (-\Box + \chi^2 - i\varepsilon)\delta(x-y)\delta_{ij} -$$
$$- Q_{ij}(x,y) - Q_{ji}(y,x). \tag{59}$$

Проводя интегрирование по φ, для производящего функционала получим выражение

$$CZ[\bar{\eta}, \eta, J] = \exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta Q_{jj}(x,x)}\right)^2 d^4x + \Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right) + \right.$$
$$\left. + i\int d^4x d^4y\bar{\eta}(x) G_+\left(x, y \mid -i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\eta(y)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}\left(Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2}\int d^4x d^4y J\left(x \mid Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right) D\left(x, y \mid Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right) J\left(y \mid Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right\}\Big|_{\substack{Q=0\\Q'=0}} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}\left(Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right) + \frac{i}{2}\int d^4x d^4y J\left(x \mid Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right)\times\right.$$
$$\left.\times D\left(x, y \mid Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right) J\left(y \mid Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right)\right\}\exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int Q^2_{jj}(x,x)d^4x + \Pi(Q) + \right.$$
$$\left. + i\int\bar{\eta}(x) G_+(x, y \mid Q)\eta(y)d^4x d^4y\right\}\Big|_{\substack{Q=0\\Q'=0}}. \tag{60}$$

До этого момента наши рассуждения носили характер тождественных преобразований. Сделаем теперь обобщение, сняв в выражении (60) условия: $Q = 0$, $Q' = 0$. Тогда получим пару обобщенных производящих функционалов [2]:

$$CZ[\bar{\eta}, \eta, J, Q, Q'] = \exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta Q_{jj}(x,x)}\right)^2 d^4x + \Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right) + \right.$$
$$\left. + i\int d^4x d^4y\bar{\eta}(x) G_+\left(x, y \mid -i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\eta(y)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}\left(Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2}\int d^4x d^4y J\left(x \mid Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right) D\left(x, y \mid Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right) J\left(y \mid Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right\}, \tag{61}$$

---

[1] Здесь и далее под $\Pi(Q)$, $G_+(Q)$ и т. д. следует понимать функционалы решений уравнений (45) — (47) при произвольных $Q_{ij}(x, y)$. Соответственно под $\Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)$, $G_+\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)$, $\Delta\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)$ и т. д. следует понимать значения тех же величин после формальной замены $Q \to -i\frac{\delta}{\delta Q}$.

[2] Заметим, что с формальной точки зрения выражения для производящего функционала (61), (62) почти не изменились бы, если бы теория не обладала $C\tau_2$-инвариантно-

$$C\tilde{Z}[\bar{\eta}, \eta, J, Q, Q'] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}\left(Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right) + \right.$$
$$+\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J\left(x \mid Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right) D\left(x, y \mid Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right) J\left(y \mid Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right)\Big\}\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int Q_{jj}^2(x,x)\,d^4x + \Pi(Q) + i\int\bar{\eta}(x)\,G_+(x, y \mid Q)\,\eta(y)\,d^4x d^4y\right\}, \tag{62}$$

таких, что

$$CZ[\bar{\eta}, \eta, J, 0, 0] = C\tilde{Z}[\bar{\eta}, \eta, J, 0, 0] = CZ[\bar{\eta}, \eta, J], \tag{63}$$

т. е. предельные значения функционалов (61), (62) совпадают с производящим функционалом обычной формулировки. Это дает возможность рассматривать модифицированные представления (61), (62) как основу новой формулировки теории поля, в которой роль «динамических переменных» выполняют не локальные поля $\bar{\psi}$, ψ, φ, ассоциированные с каждой точкой 4-пространства, а некоторые новые «динамические переменные» $Q_{ij}(x, y)$, $Q'_{ij}(x, y)$, ассоциированные с парой 4-х мерных точек x и y (билокальные переменные).

Важное свойство представлений (61) состоит в том, что локальные источники $\bar{\eta}(x)$, $J(x)$, $\eta(x)$ входят в них параметрически или, другими словами, без участия операций дифференцирования по этим источникам. Это дает возможность явного перехода к пределу выключенных источников нуклонных или мезонных полей непосредственно в представлениях (61), (62) или их производных по источникам (функциях Грина). Наибольшие упрощения в этом смысле возникают в предельном случае $\bar{\eta}(x) = \eta(x) = 0$, т. е. при выключенных нуклонных источниках. В этом случае модифицированный ток $J(x \mid Q)$ совпадает с внешним током $J(x)$, переменные Q' становятся параметрическими и, переходя сразу к пределу $Q' = 0$, получаем из (61), (62):

$$CZ[0, 0, J, Q, 0] = \exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta Q_{jj}(x,x)}\right)^2 d^4x + \Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}(Q) + \frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\,D(x, y \mid Q)\,J(y)\right\}, \tag{64}$$

$$C\tilde{Z}[0, 0, J, Q, 0] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right) + \frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\,D\times\right.$$
$$\left.\times\left(x, y \mid -i\frac{\delta}{\delta Q}\right) J(y)\right\}\exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int Q_{jj}^2(x, x)\,d^4x + \Pi(Q)\right\}. \tag{65}$$

Сравнивая (61), (62) и (64), видим, что при $\bar{\eta}$, $\eta \neq 0$ представления (61), (62) включают переменные Q и Q', которые обслуживают соответственно четную и нечетную относительно мезонного поля части функции Грина во внешнем поле. При $\bar{\eta} = \eta = 0$ нуклонные степени свободы входят лишь посредством величины $\Pi(Q)$, которая, как было показано, является четным функционалом мезонного поля, и поэтому переменные Q' в (64), (65) не входят. Далее непосредственно из (64), (65) видим, что все нечетные производные (64), (65) по J обращаются в нуль. В то же время любая четная производная, например (64) по J, пропорциональна производной в 2 раза низшего порядка по Q. Это естественным образом вытекает из построения представлений (61), (64). В самом деле, воспользовавшись

стью и $\Pi(\varphi)$ не являлся бы четной функцией поля. В этом случае процедура (52), будучи применена непосредственно к (22), привела бы к появлению в выражении (55) для модифицированного тока дополнительного члена, происходящего от нечетной по φ части $\Pi(\varphi)$, в то время как четная часть $\Pi(\varphi)$ вошла бы в (61), (62) на месте $\Pi(Q)$ или $\Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)$.

тождеством (56), которое индуцирует подстановку (48), мы фактически ввели переменные $Q_{ij}(x, y)$ как источник произведения полей $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(y)$. Это проявляется в том, что операция, например

$$-\frac{\delta^2}{\delta J_i(x)\,\delta J_j(y)},$$

примененная к (57), эквивалентна (до предельного перехода $Q = 0$) операции

$$-i\frac{\delta}{\delta Q_{ij}(x, y)}$$

и т. д. Указанное обстоятельство позволяет для описания замкнутой системы полей перейти в (64), (65) к пределу $J = 0$ и рассматривать, например, (64) как функционал только переменных $Q_{ij}(x, y)$. При этом функция Грина системы $2n$ мезонов равна (с точностью до множителя n-й производной) $Z[Q] \equiv Z[0, 0, 0, Q, 0]$ по $Q_{ij}(x, y)$.

Таким образом, полагая в (64) $J = 0$, получаем

$$CZ[Q] = \exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta Q_{jj}(x, x)}\right)^2 d^4x + \Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}(Q)\right\}. \tag{66}$$

Вводя далее величину $\langle D_{ij}(x, y)\rangle$, которая при $Q_{ij}(x, y) = 0$ совпадает с одномезонной функцией Грина обычной формулировки, найдем для нее

$$\langle D_{ij}(x, y)\rangle \equiv -i\left.\frac{\delta^2 \ln Z[0, 0, J, Q, 0]}{\delta J_i(x)\,\delta J_j(y)}\right|_{J=0} = \frac{\delta \ln Z[Q]}{\delta Q_{ij}(x, y)}. \tag{67}$$

Важное свойство модифицированного производящего функционала (61) состоит в том, что не только он сам, но и его вторая производная по $\bar{\eta}$, η, взятая при $\bar{\eta} = \eta = 0$, $J = 0$, может быть выражена в виде нормальной операторной формы только по переменным $Q_{ij}(x, y)$. Это связано с тем, что согласно (55) модифицированный ток $J(x \mid Q)$ зависит билинейно от $\bar{\eta}$, η, так что выражение

$$J\left(x \mid Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right) D\left(x, y \mid Q - i\frac{\delta}{\delta Q'}\right) J\left(y \mid Q' - i\frac{\delta}{\delta Q}\right),$$

входящее в (61), является при отсутствии внешнего тока $J(x)$ функционалом четвертой степени по $\bar{\eta}$, η и не дает вклада во вторую производную по $\bar{\eta}$, η при $\bar{\eta} = \eta = 0$. Таким образом, для величины $\langle G(x, y)\rangle$, которая при $Q_{ij}(x, y) = 0$ переходит в однонуклонную функцию Грина обычной формулировки, получим

$$\langle G(x, y)\rangle \equiv -i\left.\frac{\delta \ln Z[\bar{\eta}, \eta, 0, Q, 0]}{\delta\eta(x)\,\delta\bar{\eta}(y)}\right|_{\bar{\eta}=\eta=0} =$$
$$= Z^{-1}[Q]\exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta Q_{jj}(x, x)}\right)^2 d^4x + \Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right\}\times$$
$$\times G_+\left(x, y \mid -i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}(Q)\right\}. \tag{68}$$

Указанное обстоятельство позволяет получить систему функциональных уравнений в терминах переменных $Q_{ij}(x, y)$ для функций Грина $\langle D_{ij}(x, y)\rangle$ и $\langle G(x, y)\rangle$. Эта система функциональных уравнений напоминает систему функциональных уравнений Швингера в обычной формулировке и может быть использована для получения бесконечной системы интегральных уравнений, аналогичной обычным уравнениям для G, Γ, D (см. ниже).

Необходимо отметить, что предлагаемая формулировка теории поля в терминах билокальных переменных приобретает наиболее простой вид в отсутствие нуклонных источников. Поэтому она наиболее адекватна для описания функций Грина, не содержащих внешних нуклонов (или содержащих не более одного нуклона). Описание функций Грина, содержащих два и более внешних нуклонов, требует привлечения переменных $Q'_{ij}(x, y)$, обслуживающих нечетную часть функции Грина нуклона во внешнем поле.

Конечно, это не означает никакой реальной математической трудности — речь идет лишь о простоте аппарата.

В заключение этого раздела кратко остановимся на одной модификации обобщенных производящих функционалов, которая будет полезна в дальнейшем. Эта модификация естественным образом возникает, если воспользоваться соотношением

$$\tau_i\tau_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\tau_k \tag{69}$$

и с его помощью представить $\Pi(\varphi)$ в форме

$$\Pi(\varphi) \equiv \Pi(Q; R) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln G_+^{-1}(Q, R) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\ln \Delta^{-1}(Q) + \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\ln\left[G_+^{(1)}(Q, R)\right]^{-1}, \tag{70}$$

где $G_+(Q, R)$, $G_+^{(1)}(Q, R)$ и $\Delta(Q)$ удовлетворяют уравнениям:

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)G_+(x, y\,|\,Q, R) + \int d^4y_1 g^2\gamma_5 G_0(x - y_1)\gamma_5(Q(x, y_1) + i\tau_j R_j(x, y_1))G_+(y_1, y\,|\,Q, R) = \delta(x - y), \tag{71}$$

$$(-\Box + m^2 - i\varepsilon + g^2 Q(x, x))G_+^{(1)}(x, y) - g^2\gamma_\mu\gamma_\rho\int d^4y_1\Delta(x, y_1\,|\,Q)\times \left(\frac{\partial^2 Q(x, y_1)}{\partial x_\mu\partial y_{1\rho}} + i\tau_j\frac{\partial^2 R_j(x, y_1)}{\partial x_\mu\partial y_{1\rho}}\right)G_+^{(1)}(y_1, y\,|\,Q, R) = \delta(x - y), \tag{72}$$

$$(-\Box + m^2 - i\varepsilon + g^2 Q(x, x))\Delta(x, y\,|\,Q) = \delta(x - y), \tag{73}$$

где введены обозначения:

$$Q(x, y) = \varphi_j(x)\varphi_j(y), \tag{74}$$

$$R_i(x, y) = \varepsilon_{ijk}\varphi_j(x)\varphi_k(y). \tag{75}$$

Действуя по аналогии с предыдущим, введем теперь произвольные $Q(x, y)$ и $R_i(x, y)$ как источники соответственно скаляра

$$\varphi_i(x)\varphi_i(y) \tag{76}$$

и вектора

$$\varepsilon_{ijk}\varphi_j(x)\varphi_k(y). \tag{77}$$

Тогда для произвольного функционала $F(Q, R)$ будем иметь тождество, индуцирующее подстановки (74), (75):

$$F(Q, R)\big|_{\substack{Q(x,y)=\varphi_i(x)\varphi_i(y)\\ R_i(x,y)=\varepsilon_{ijk}\varphi_j(x)\varphi_k(y)}} \equiv F\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}, -i\frac{\delta}{\delta R}\right)\exp\left\{i\int d^4x d^4y \times\right.$$
$$\left.\times[\varphi_i(x)Q(x,y)\varphi_i(y)+R_i(x,y)\varepsilon_{ijk}\varphi_j(x)\varphi_k(y)]\right\}\Big|_{\substack{R=0\\ Q=0}} =$$
$$=\exp\left\{i\int d^4xd^4y\left[\varphi_i(x)(-i)\frac{\delta}{\delta Q(x,y)}\varphi_i(y)+(-i)\frac{\delta}{\delta R_i(x,y)}\varepsilon_{ijk}\varphi_j(x)\varphi_k(y)\right]\right\}\times$$
$$\times F(Q,R)\big|_{Q=R=0}. \quad (78)$$

Полагая в (78)

$$F(Q, R)=\exp \Pi(Q, R)+\frac{i\lambda}{4}\int Q^2(x, x)\, d^4x \quad (79)$$

и подставляя в (24) при $\bar\eta=\eta=0$, получаем

$$CZ[0, 0, J]=\exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta Q(x, x)}\right)^2 d^4x+\Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}, -i\frac{\delta}{\delta R}\right)\right\}\times$$
$$\times\int(D\varphi)\exp\left\{-\frac{i}{2}\int\varphi_i(x)D_{ij}^{-1}(x,y\,|\,Q,R)\varphi_j(y)\,d^4xd^4y+i\int J_i(x)\varphi_i(x)d^4x\right\}\Big|_{Q=R=0}, \quad (80)$$

где

$$D_{ij}^{-1}(x, y\,|\,Q, R)\equiv\langle i, x\,|\,D^{-1}(Q, R)\,|\,j, y\rangle=(-\Box+\chi^2-i\varepsilon)\,\delta(x-y)\,\delta_{ij}-$$
$$-(Q(x,y)+Q(y,x))\,\delta_{ij}-\varepsilon_{ijk}(R_k(x,y)-R_k(y,x)). \quad (81)$$

Выполняя в (80) интегрирование по φ и проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, получим модифицированную пару функционалов:

$$CZ[0, 0, J, Q]=\exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta Q(x, x)}\right)^2 d^4x+\Pi\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}, -i\frac{\delta}{\delta R}\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}(Q, R)+\frac{i}{2}\int J(x)\,D(x, y\,|\,Q, R)\,J(y)\,d^4xd^4y\right\}, \quad (82)$$
$$C\widetilde{Z}[0, 0, J, Q, R]=\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}, -i\frac{\delta}{\delta R}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{i}{2}\int J(x)\,D\left(x, y\,|-i\frac{\delta}{\delta Q}, -i\frac{\delta}{\delta R}\right)J(y)\,d^4xd^4y\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{\lambda}{4}\int Q^2(x, x)\,d^4x+\Pi(Q, R)\right\}. \quad (83)$$

Так же, как и (64), (65), функционалы (82), (83) могут служить основой формулировки теории, с той лишь разницей, что величины $Q_{ij}(x, y)$ в (64), (65) образуют 3-мерный изотензор, в то время как в (82), (83) мы вводим скаляр $Q(x, y)$ и изовектор $R_i(x, y)$; в дальнейшем это дает определенные преимущества при формулировке метода собственного времени.

2. Система функциональных уравнений для функций Грина в терминах билокальных переменных $Q_{ij}(x, y)$

Для целей данного раздела удобно воспользоваться выражением (66) разд. 1 для производящего функционала при $I=0$, которое представим в форме

$$CZ[Q]=\exp\left\{\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}(Q)\right\}, \quad (1)$$

где

$$\widetilde{\Pi}(Q) = \frac{i\lambda}{4}\int Q_{jj}^2(x,x)\,d^4x + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln G_+^{-1}(Q), \qquad (2)$$

причем $D^{-1}(Q)$ определяется (59) и $G_+(Q)$ — решение уравнения (45) разд. 1 при произвольном $Q_{ij}(x,y)$. Используя (1) для величины $\langle D_{ij}(x,y)\rangle$, определяемой (67) разд. 1, будем иметь [1]

$$\langle D_{ij}(x,y)\rangle = Z^{-1}[Q]\frac{\delta Z}{\delta Q_{ij}(x,y)} = Z^{-1}[Q]\exp\left[\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right]\langle x,i|(-\Box+\chi^2 -$$
$$- Q - Q^T)^{-1}|y,j\rangle \exp\left[-\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right]Z[Q] = \langle x,i\left|\left\{-\Box+\chi^2 -\right.\right.$$
$$\left.\left.- Z^{-1}[Q]\exp\left[\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right](Q+Q^T)\exp\left[-\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q}\right)\right]Z[Q]\right\}^{-1}\right|y,j\right\rangle =$$
$$= \left\langle x,i\left|\left\{-\Box+\chi^2 - \exp\left[\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q} - i\langle D\rangle\right)\right](Q+Q^T)\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\exp\left[-\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q} - i\langle D\rangle\right)\right]\right\}^{-1}\right|y,j\right\rangle, \qquad (3)$$

где учтено преобразование

$$Z^{-1}[Q]\frac{\delta}{\delta Q_{ij}(x,y)}Z[Q] = \langle D_{ij}(x,y)\rangle + \frac{\delta}{\delta Q_{ij}(x,y)}, \qquad (4)$$

в силу которого

$$\left[\left(\langle D_{ij}(x,y)\rangle + \frac{\delta}{\delta Q_{ij}(x,y)}\right), \left(\langle D_{rs}(x',y')\rangle + \frac{\delta}{\delta Q_{rs}(x',y')}\right)\right]_- = 0 \qquad (5)$$

в согласии с соотношением симметрии

$$\frac{\delta\langle D_{ij}(x,y)\rangle}{\delta Q_{rs}(x',y')} = \frac{\delta^2\ln Z[Q]}{\delta Q_{ij}(x,y)\,\delta Q_{rs}(x',y')} = \frac{\delta\langle D_{rs}(x',y')\rangle}{\delta Q_{ij}(x,y)}. \qquad (6)$$

Далее

$$\exp\left[\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q} - i\langle D\rangle\right)\right]Q_{ij}(x,y)\exp\left[-\widetilde{\Pi}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q} - i\langle D\rangle\right)\right] =$$
$$= Q_{ij}(x,y) + \frac{\lambda}{2}\delta_{ij}\delta(x-y)(-i)\left(\frac{\delta}{\delta Q_{ss}(x,x)} + \langle D_{ss}(x,x)\rangle\right) -$$
$$- \frac{ig^2}{2}\operatorname{Sp}\gamma_5\tau_i G_0(x-y)\gamma_5\tau_j G_+\left(y,x\,\middle|\,-i\frac{\delta}{\delta Q} - i\langle D\rangle\right). \qquad (7)$$

Кроме того, для произвольного функционала $F(Q)$ имеет место тождество, вытекающее из (5):

$$F\left(\frac{\delta}{\delta Q} + \langle D\rangle\right)\langle D_{ij}(x,y)\rangle\cdot 1 \equiv \left(\langle D_{ij}(x,y)\rangle + \frac{\delta}{\delta Q_{ij}(x,y)}\right)F\left(\frac{\delta}{\delta Q} + \langle D\rangle\right)\cdot 1, \qquad (8)$$

в правой и левой частях которого умножение на единицу означает, что справа от единицы отсутствуют факторы, являющиеся функционалами $Q_{ij}(x,y)$. С учетом этих соотношений обращение оператора в фигурных скобках дает для $\langle D_{ij}(x,y)\rangle$ уравнение, явная интегральная форма кото-

[1] Здесь и в дальнейшем используется формула

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}}\operatorname{Sp}\ln X = (X^{-1})_{ji}.$$

рого имеет вид

$$(-\Box+\chi^2)\langle D_{ij}(x,y)\rangle-\int d^4y_1\Big\{\Big[Q_{is}(x,y_1)+Q_{si}(y_1,x)-$$
$$-i\lambda\delta(x-y_1)\delta_{is}\Big(\langle D_{rr}(x,x)\rangle+\frac{\delta}{\delta Q_{rr}(x,x)}\Big)\Big]\langle D_{sj}(y_1,y)\rangle-$$
$$-ig^2\,\mathrm{Sp}\,\gamma_5\tau_i G_0(x-y_1)\gamma_5\tau_s\langle G(y_1,x)\rangle\times$$
$$\times\Big(\langle D_{sj}(y_1,y)\rangle+\frac{\delta}{\delta Q_{sj}(y_1,y)}\Big)\Big\}=\delta_{ij}\delta(x-y), \tag{9}$$

где

$$\langle G(x,y)\rangle=Z^{-1}[Q]\,G_+\Big(x,y\,\Big|-i\frac{\delta}{\delta Q}\Big)Z[Q]\cdot 1=$$
$$=G_+\Big(x,y\,\Big|-i\frac{\delta}{\delta Q}-i\langle D\rangle\Big)\cdot 1 \tag{10}$$

в согласии с (68) разд. 1.

Таким образом, для $\langle G(x,y)\rangle$ будем иметь, сравнивая (10) с (45) разд. 1:

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\langle G(x,y)\rangle-ig^2\int d^4y_1\gamma_5\tau_i G_0(x-y_1)\gamma_5\tau_j\times$$
$$\times\Big(\langle D_{ij}(x,y_1)\rangle+\frac{\delta}{\delta Q_{ij}(x,y_1)}\Big)\langle G(y_1,y)\rangle=\delta(x-y). \tag{11}$$

Уравнения (9), (11) образуют замкнутую систему функциональных уравнений в переменных $Q_{ij}(x,y)$ для нуклонной и мезонной функций Грина.

3. Метод собственного времени для бозе-частиц (мезонов)

Важным следствием предлагаемой в данной работе формулировки теории поля является формализм собственного времени мезонов, аналогичный формализму собственного времени для нуклонов в обычной формулировке.

В этом разделе рассмотрим этот формализм, используя для производящего функционала выражение (83) разд. 1:

$$CZ=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln D^{-1}\Big(-i\frac{\delta}{\delta Q'}-i\frac{\delta}{\delta R}\Big)+\frac{i}{2}\int J(x)\,D\Big(x,y\,|-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta Q'}-i\frac{\delta}{\delta R}\Big)J(y)\,d^4x\,d^4y\Big\}\exp\Big\{i\frac{\lambda}{4}\int Q^2(x,x)\,d^4x+\Pi(Q,R)\Big\}, \tag{1}$$

где (для удобства читателя все обозначения воспроизводятся здесь еще раз)

$$\Pi(Q,R)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln G_+^{-1}(Q,R)=\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\ln\Delta^{-1}(Q)+\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\ln[G_+^{(1)}(Q,R)]^{-1}. \tag{2}$$

Функции Грина $G_+(x,y\,|\,Q,R)$, $G_+^{(1)}(x,y\,|\,Q,R)$, $\Delta(x,y\,|\,Q)$, $D(x,y\,|\,Q,R)$ удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\,G_+(x,y\,|\,Q,R)+\int d^4y_1 g^2\gamma_5 G_0(x-y_1)\gamma_5(Q(x,y_1)+$$
$$+i\tau_j R_j(x,y_1))\,G_+(y_1,y\,|\,Q,R)=\delta(x-y), \tag{3}$$

$$(-\Box+m^2+g^2Q(x,x))\,G_+^{(1)}(x,y\,|\,Q,R)-g^2\gamma_\mu\gamma_\rho\int d^4y_1\Delta(x,y_1\,|\,Q)\times$$
$$\times\Big(\frac{\partial^2 Q(x,y_1)}{\partial x_\mu\partial y_{1\rho}}+i\tau_j\frac{\partial^2 R_j(x,y_1)}{\partial x_\mu\partial y_{1\rho}}\Big)G_+^{(1)}(y_1y\,|\,Q,R)=\delta(x-y), \tag{4}$$

$$(-\Box+m^2+g^2Q(x,x))\,\Delta(x,y\,|\,Q)=\delta(x-y), \tag{5}$$

$$(-\Box+\chi^2)\,D_{ij}(x,y\,|\,Q,R)-\int d^4y_1P_{is}(x,y_1)\,D_{sj}(y_1,y)=\delta(x-y), \tag{6}$$

$$P_{ij}(x,y)=(Q(x,y)+Q(y,x))\,\delta_{ij}+\varepsilon_{ijk}(R_k(x,y)-R_k(y,x)). \tag{7}$$

Действуя по аналогии с обычной техникой, представим решение уравнения (6) в виде нормальной формы. Для этого представим (6) в дифференциальной форме

$$\left\{-\Box+\chi^2-\int d^4zP(x,x+z)\,e^{z\frac{\partial}{\partial x}}\right\}D(x,y)=\delta(x-y). \tag{8}$$

и будем искать его решение в виде

$$D(x,y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp\left[ik(x-y)\right]D(k,x). \tag{9}$$

Подставив это в (8), получим

$$\left\{-(\partial_\mu+ik_\mu)^2+\chi^2-\int d^4zP(x,x+z)\exp\left[z\left(\frac{\partial}{\partial x}+ik\right)\right]\right\}D(k,x)=1, \tag{10}$$

откуда

$$D(k,x)=\frac{1}{-(\partial_\mu+ik_\mu)^2+\chi^2-i\varepsilon-\int d^4zP(x,x+z)\exp\left[z\left(\frac{\partial}{\partial x}+ik\right)\right]}. \tag{11}$$

Применяя экспоненциальную параметризацию обратного оператора и учитывая, что в силу (7) $P=P^+$, получаем

$$D(k,x)=i\int\limits_0^\infty\exp\left[-i\alpha(k^2+\chi^2-i\varepsilon)\right]\Phi(\alpha;k,x)\,d\alpha, \tag{12}$$

где $\Phi(\alpha,k,x)$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\left\{-\Box-2ik_\rho\partial_\mu-\int d^4zP(x,x+z)\exp\left[z\left(\frac{\partial}{\partial x}+ik\right)\right]\right\}\Phi, \tag{13}$$
$$\Phi(\alpha=0)=1.$$

Действуя методом, предложенным одним из авторов (Е. С. Фрадкиным), введем в «гамильтониан» уравнения (13) источники операторов координат и импульсов:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\left\{-\Box-2ik_\mu\partial_\mu-\int d^4zP(x,x+z)\exp\left[z\left(\frac{\partial}{\partial x}+ik\right)\right]+\right.$$
$$\left.+u_\mu(\alpha)x_\mu-it_\mu(\alpha)\partial_\mu\right\}\Phi. \tag{14}$$

Обычной методикой из (14) получим

$$\Phi=T_\alpha\exp\left\{i\int\limits_0^\alpha d\alpha'\left[\int d^4zP\left(i\frac{\delta}{\delta u(\alpha')},i\frac{\delta}{\delta u(\alpha')}+z\right)\exp\left(z\left(ik-\frac{\delta}{\delta t(\alpha')}\right)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\delta^2}{\delta t(\alpha')^2}\right]\right\}\Phi_1(x\,|\,u,t), \tag{15}$$

где символ T_α означает операцию хронологического упорядочения по переменной собственного времени α применительно к P как оператору в изопространстве. Величина Φ_1 удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha}=\{u_\mu(\alpha)x_\mu-i(t_\mu(\alpha)+2k_\mu)\partial_\mu\}\Phi_1, \tag{16}$$

$$\Phi_1(\alpha=0)=1, \tag{17}$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_1(x\,|\,u, t) = \exp\left\{-i\int_0^\alpha u(\alpha')\left[x - 2k(\alpha - \alpha') - \int_{\alpha'}^{\alpha} t(\xi)\,d\xi\right]d\alpha'\right\}. \quad (18)$$

Подставляя это в (15), найдем [1]

$$\Phi = \left\langle \exp\left\{i\int_0^\alpha dx' \int d^4z P(x(\alpha'), x(\alpha') + z)\, e^{izk(\alpha')}\right\}\right\rangle, \quad (19$$

где

$$k(\xi) = k + i\,\frac{\delta}{\delta t(\xi)}, \quad (20)$$

$$x(\alpha') = x - 2k(\alpha - \alpha') + i\int_{\alpha'}^{\alpha} \frac{\delta}{\delta u(\xi)}\,d\xi; \quad (21)$$

операция осреднения определена равенством

$$\left\langle A\left(\frac{\delta}{\delta u}, \frac{\delta}{\delta t}\right)\right\rangle \equiv A\left(\frac{\delta}{\delta u}, \frac{\delta}{\delta t}\right)\exp\left\{-i\int_0^\alpha u^2(\alpha')\,d\alpha' + i\int_0^\alpha u(\alpha')\,t(\alpha')\,d\alpha'\right\}\Bigg|_{\substack{u=0\\ t=0}}. \quad (22)$$

Таким образом, окончательно для $D\,(x, y)$ найдем

$$D(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp[ik(x - y)]\, i\int_0^\infty d\alpha \exp[-i\alpha(k^2 + \chi^2 - i\varepsilon)]\times$$

$$\times\left\langle \exp\left\{i\int_0^\alpha d\alpha' \int d^4z P(\alpha'), x(\alpha') + z)\, e^{izk(\alpha')}\right\}\right\rangle. \quad (23)$$

Аналогичной методикой получим [2]

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln D^{-1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\int \frac{d^4k\,d^4x}{(2\pi)^4}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\exp[-i\alpha(k^2 + \chi^2 - i\varepsilon)]\times$$

$$\times\left[\left\langle \exp\left\{i\int_0^\alpha d\alpha' \int d^4z P(x(\alpha'), x(\alpha') + z)\, e^{izk(\alpha')}\right\rangle - 1\right\}\right]. \quad (24)$$

Формулы (19) — (24) дают замкнутые выражения для функции Грина и детерминанта Фредгольма уравнений (6), (7). Произведем далее в (7) замену $Q \to -i\,\frac{\delta}{\delta Q}$, $R \to -i\,\frac{\delta}{\delta R}$. Подставляя затем (23), (24) в (1) и разлагая первую экспоненту в (1) по степеням ее аргумента, проводим дифференцирование по Q и R, которое сводится к операции сдвига. Таким образом получим [3]

$$CZ = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n\, n!}\prod_{s=1}^{n}\int \frac{d^4k_s\, d^4x_s}{(2\pi)^4}\, e^{ik_s x_s}\int_0^\infty d\alpha_s \exp[-i\alpha_s(k_s^2 + \chi^2 - i\varepsilon)]\times$$

$$\times J(x_s)\, T_{\alpha_s}\exp\left[\int_0^{\alpha_s}\varepsilon_j(\xi)\,\frac{\delta}{\delta\eta_{sj}(\xi)}\,d\xi\right]\tilde{J}(k_s)\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r r!}\prod_{s_1=1}^{r}\int \frac{d^4k'_{s_1}\, d^4x'_{s_1}}{(2\pi)^4}\int_0^\infty \frac{d\alpha'_{s_1}}{\alpha'_{s_1}}\exp[-i\alpha'_{s_1}(k'^2_{s_1} + \chi^2 + i\varepsilon)]\times$$

$$\times\mathrm{Sp}\, T_{\alpha'_{s_1}}\exp\left[\int_0^{\alpha'_{s_1}}\varepsilon_j(\xi)\,\frac{\delta}{\delta\eta'_{sj}(\xi)}\,d\xi\right]\times\langle\exp\{A_{nr}\}\rangle\Big|_{\eta=\eta'=0}, \quad (25)$$

[1] Подразумевается T_α-упорядочение относительно матриц в изопространстве.

[2] В (24) в правой части символ Sp относится только к изопространству.

[3] ε_j-матрица с элементами $(\varepsilon_j)_{ik} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$.

$$A_{nr}=i\lambda\sum_{s,\,s_1=1}^{n}\int_0^{\alpha_s}d\xi'\int_0^{\alpha_{s_1}}d\xi''\delta(x_s(\xi')-x_{s_1}(\xi''))+i\lambda\sum_{s,\,s_1=1}^{r}\int_0^{\alpha_s'}d\xi'\int_0^{\alpha_{s_1}'}d\xi''\delta(x_s'(\xi')-$$

$$-x_{s_1}'(\xi''))+2i\lambda\sum_{s=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{r}\int_0^{\alpha_s}d\xi'\int_0^{\alpha_{s_1}'}d\xi''\delta(x_s(\xi')-x_{s_1}'(\xi''))+\Pi(Q^{(nr)},R^{(nr)}),\qquad(26)$$

$$Q^{(nr)}(x,y)=\sum_{s=1}^{n}\int_0^{\alpha_s}[\delta(x-x_s(\xi))\exp(-i(x-y)k_s(\xi))+\delta(y-x_s(\xi))\times$$

$$\times\exp(i(x-y)k_s(\xi))]\,d\xi+\sum_{s=1}^{r}\int_0^{\alpha_s'}[\delta(x-x_s'(\xi))\exp(-i(x-y)k_s'(\xi))+$$

$$+\delta(y-x_s'(\xi))\exp(i(x-y)k_s'(\xi))]\,d\xi,\qquad(27)$$

$$R_j^{(nr)}(x,y)=\sum_{s=1}^{n}\int_0^{\alpha_s}[\delta(x-x_s(\xi))\exp(-i(x-y)k_s(\xi))-\delta(y-x_s(\xi))\times$$

$$\times\exp(i(x-y)k_s(\xi))]\,\eta_{sj}(\xi)\,d\xi+\sum_{s=1}^{r}\int_0^{\alpha_s'}[\delta(x-x_s'(\xi))\exp(-i(x-y)k_s'(\xi))-$$

$$-\delta(y-x_s'(\xi))\exp(i(x-y)k_s'(\xi))]\,\eta_{sj}'(\xi)\,d\xi,\qquad(28)$$

$$x_s(\xi)=x_s-2k_s(\alpha_s-\xi)+i\int_\xi^{\alpha_s}\frac{\delta}{\delta u_s(\zeta)}\,d\zeta,\qquad(29)$$

$$k_s(\xi)=k_s+i\,\frac{\delta}{\delta t_s(\xi)},$$

$$0\leqslant\xi\leqslant\alpha_s,\qquad s=1,2,\ldots,n;$$

$$x_s'(\xi)=x_s'-2k_s'(\alpha_s'-\xi)+i\int_\xi^{\alpha_s'}\frac{\delta}{\delta u_s'(\zeta)}\,d\zeta,\qquad(30)$$

$$k_s'(\xi)=k_s'+i\,\frac{\delta}{\delta t_s'(\xi)},$$

$$0\leqslant\xi\leqslant\alpha_s',\qquad s=1,2,\ldots,r$$

Операция осреднения в (25) определена для произвольного функционала $F\left(\frac{\delta}{\delta u},\frac{\delta}{\delta t}\right)$ равенством

$$\left\langle F\left(\frac{\delta}{\delta u},\frac{\delta}{\delta t}\right)\right\rangle\equiv F\left(\frac{\delta}{\delta u},\frac{\delta}{\delta t}\right)\exp\left\{-i\sum_{s=1}^{n}\int_0^{\alpha_s}[u_s^2(\xi)-u_s(\xi)\,t_s(\xi)]\,d\xi-\right.$$

$$\left.-i\sum_{s=1}^{r}\int_0^{\alpha_s'}[u_s'^2(\xi)-u_s'(\xi)\,t_s'(\xi)]\,d\xi\right\}\Bigg|_{\substack{u=t=0\\u'=t'=0}}.\qquad(31)$$

Для входящей в (26) величины $\Pi(Q^{(nr)},R^{(nr)})$ будем иметь

$$\Pi(Q^{(nr)},R^{(nr)})=\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln G_+^{-1}(Q^{(nr)},R^{(nr)})=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 d\lambda\int d^4x\,d^4y\,\mathrm{Sp}\,G_+(y,x\,|\,\lambda Q^{(nr)},\lambda R^{(nr)})\,g^2\gamma_5G_0(x-y)\,\gamma_5\,(Q^{(nr)}(x,y)+$$

$$+ i\tau_j R_j^{(nr)}(x, y)) = g^2 \int_0^1 d\lambda\, \mathrm{Sp}\Big[\sum_{s=1}^{n} \int_0^{\alpha_s} \Gamma_+(k_s(\xi); x_s(\xi), x_s(\xi))\, T_+^{(s)}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r} \int_0^{\alpha_s'} \Gamma_+(k_s'(\xi); x_s'(\xi), x_s'(\xi))\, T_+'^{(s)}(\xi)\, d\xi\Big], \tag{32}$$

где

$$\Gamma_+(k; x, y) = \int d^4z e^{-ikz}\gamma_5 G_0(z)\gamma_5 G_+(x-z, y\,|\,\lambda Q^{(nr)}, \lambda R^{(nr)}), \tag{33}$$

$$T_\pm'^{(s)}(\xi) = 1 \pm i\eta_{sj}'(\xi)\tau_j, \tag{34}$$

$$T_\pm^{(s)}(\xi) = 1 \pm i\eta_{sj}(\xi)\tau_j. \tag{35}$$

Значения величин $\Gamma_+(k, x, y)$, $G_+(x, y)$ на виртуальных траекториях бозе-квантов (мезонов) получаются из производящей системы интегральных уравнений, возникающей при подстановке (27), (28) в уравнение (3). При этом то обстоятельство, что ядра (27), (28) сосредоточены на виртуальных траекториях мезонов, позволяет замкнуть производящую систему уравнений, так что вместо интегрального уравнения в 4-мерном пространстве мы получаем систему интегральных уравнений на совокупности траекторий; таким образом, имеем:

$$G_+(x, y) + \sum_{s=1}^{n} g^2\lambda \int_0^{\alpha_s} T_+^{(s)}(\xi)\, G_0(x - x_s(\xi))\, \Gamma_+(k_s(\xi); x_s(\xi), y)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} g^2\lambda \int_0^{\alpha_s} T_-^{(s)}(\xi)\, \Gamma_-^{(0)}(k_s, (\xi); x - x_s(\xi))\, G_+(x_s(\xi), y)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r} g^2\lambda \int_0^{\alpha_s'} T_+'^{(s)}(\xi)\, G_0(x - x_s'(\xi))\, \Gamma_+(k_s'(\xi); x_s'(\xi), y)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r} g^2\lambda \int_0^{\alpha_s'} T_-'^{(s)}(\xi)\, \Gamma_-^{(0)}(k_s'(\xi); x - x_s'(\xi))\, G_+(x_s'(\xi), y)\, d\xi = G_0(x-y), \tag{36}$$

$$\Gamma_+(k;\ x, y) + \sum_{s=1}^{n} g^2\lambda \int_0^{\alpha_s} T_+^{(s)}(\xi)\, \Gamma_+^{(0)}(k, x - x_s(\xi))\, \Gamma_+(k_s(\xi); x_s(\xi), y)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} g^2\lambda \int_0^{\alpha_s} T_-^{(s)}(\xi)\, \Gamma_{+-}^{(0)}(k; k_s(\xi), x - x_s(\xi))\, G_+(x_s(\xi), y)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r} g^2\lambda \int_0^{\alpha_s'} T_+'^{(s)}(\xi)\, \Gamma_+^{(0)}(k; x - x_s'(\xi))\, \Gamma_+(k_s'(\xi); x_s'(\xi), y)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r} g^2\lambda \int_0^{\alpha_s'} T_-'^{(s)}(\xi)\, \Gamma_{+-}^{(0)}(k; k_s'(\xi), x - x_s'(\xi))\, G_+(x_s'(\xi), y)\, d\xi = \Gamma_+^{(0)}(k; x-y). \tag{37}$$

Здесь

$$\Gamma_+^{(0)}(k; x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp(ip(x-y))\, \gamma_5 G_0(p+k)\, \gamma_5 G_0(p), \tag{38}$$

$$\Gamma_{-}^{(0)}(k;x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp(ip(x-y))G_0(p)\gamma_5G_0(p-k)\gamma_5, \tag{39}$$

$$\Gamma_{+-}^{(0)}(k,k';x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp(ip(x-y))\gamma_5G_0(p+k)\gamma_5'G_0(p)\gamma_5G_0(p-k')\gamma_5. \tag{40}$$

Для получения замкнутых интегральных уравнений на траекториях необходимо в производящих уравнениях (36), (37) произвести подстановки соответственно:

$$(x,y)\to\begin{pmatrix} x_j(\eta), & x_q(\eta') \\ x_j'(\eta), & x_q(\eta') \\ x_j(\eta), & x_q'(\eta') \\ x_j'(\eta), & x_q'(\eta') \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$(k;x,y)\to\begin{pmatrix} k_j(\eta); & x_j(\eta), & x_q(\eta') \\ k_j'(\eta); & x_j'(\eta), & x_q(\eta') \\ k_j(\eta); & x_j(\eta), & x_q'(\eta') \\ k_j'(\eta), & x_j'(\eta), & x_q'(\eta') \end{pmatrix} \tag{42}$$

Наиболее простой частный случай найденной системы интегральных уравнений на траекториях получается, если рассмотреть одномезонную функцию Грина в приближении, в котором пренебрегается членом $-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln D^{-1}\left(-i\frac{\delta}{\delta Q},-i\frac{\delta}{\delta R}\right)$ в (1). В этом случае получим

$$C\langle D(k)\rangle\cong T_\alpha i\int_0^\infty d\alpha\exp[-i\alpha(k^2+\chi^2-i\varepsilon)]\exp\left(\int_0^\alpha\varepsilon_j(\xi)\frac{\delta}{\delta\eta_j(\xi)}d\xi\right)\times$$
$$\times\langle\exp\{A_{1,0}\}\rangle|_{\eta=0}. \tag{43}$$

Здесь

$$A_{1,0}=i\lambda\int_0^\alpha d\xi'\int_0^\alpha d\xi''\delta(x(\xi')-x(\xi''))+g^2\int_0^1 d\lambda\int_0^\alpha\operatorname{Sp}\Gamma_+(\xi,\xi)T_+(\xi)d\xi, \tag{44}$$

где $\Gamma_+(\eta',\eta'')\equiv\Gamma_+(k,(\eta');x(\eta'),x(\eta'')$ удовлетворяет уравнениям:

$$\Gamma_+(\eta',\eta'')+g^2\lambda\int_0^\alpha T_+(\xi)\Gamma_+^{(0)}(k(\eta');x(\eta')-x(\xi))\Gamma_+(\xi,\eta'')d\xi+$$
$$+g^2\lambda\int_0^\alpha T_-(\xi)\Gamma_{+-}^{(0)}(k(\eta');k(\xi),x(\eta')-x(\xi))G_+(\xi,\eta'')d\xi=$$
$$=\Gamma_+^{(0)}(k(\eta');x(\eta')-x(\eta'')), \tag{45}$$

$$G_+(\eta',\eta'')+g^2\lambda\int_0^\alpha T_+(\xi)G_0(x(\eta')-x(\xi))\Gamma_+(\xi,\eta'')d\xi+$$
$$+g^2\lambda\int_0^\alpha T_-(\xi)\Gamma_-^{(0)}(k(\xi),x(\eta')-x(\xi))G_+(\xi,\eta'')d\xi=G_0(x(\eta')-x(\eta'')). \tag{46}$$

Здесь

$$G_+(\eta', \eta'') \equiv G_+(x(\eta'), x(\eta'')),$$
$$k(\xi) = k + i\frac{\delta}{\delta t(\xi)}, \tag{47}$$

$$x(\eta) - x(\xi) = 2k(\eta - \xi) + i\int_\eta^\xi \frac{\delta}{\delta u(\zeta)} d\zeta, \tag{48}$$
$$T_\pm(\xi) = 1 \pm i\eta_j(\xi)\tau_j. \tag{49}$$

Напомним также, что осреднение в (43) определено равенством

$$\left\langle F\left(\frac{\delta}{\delta u}, \frac{\delta}{\delta t}\right)\right\rangle \equiv F\left(\frac{\delta}{\delta u}, \frac{\delta}{\delta t}\right)\exp\left\{-i\int_0^\alpha [u^2(\xi) - u(\xi)t(\xi)]\,d\xi\right\}\Bigg|_{u=t=0}, \tag{50}$$

где F — произвольный функционал.

Система интегральных уравнений (45), (46), как и система (36), (37) в общем случае, представляет в математическом отношении весьма большие трудности прежде всего из-за наличия в ядрах этих уравнений произвольных функций (операторов траекторий, а также переменных $\eta(\xi)$, обслуживающих изоспин). Можно, однако, действуя в духе модифицированной теории возмущений [2], заменить в системе (45), (46) ядра и неоднородности их средними значениями в смысле (50):

$$\langle G_0(x(\eta) - x(\eta'))\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_0(p)\exp[2ipk(\eta - \eta') - ip^2|\eta - \eta'|], \tag{51}$$

$$\langle \Gamma_+^{(0)}(k(\eta); x(\eta) - x(\eta'))\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi^4)}\gamma_5 G_0(p\theta(\eta' - \eta) + k)\gamma_5 G_0(p)\times$$
$$\times \exp 2\,[ipk(\eta - \eta') - ip^2|\eta - \eta'|], \tag{52}$$

$$\langle \Gamma_-^{(0)}(k(\eta'); x(\eta) - x(\eta')\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_0(p)\gamma_5 G_0(p\theta(\eta - \eta') - k)\gamma_5\times$$
$$\times \exp[2ipk(\eta - \eta') - ip^2|\eta - \eta'|], \tag{53}$$

$$\langle \Gamma_{+-}^{(0)}(k(\eta), k(\eta'); x(\eta) - x(\eta'))\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\gamma_5 G_0(p\theta(\eta' - \eta) + k)\gamma_5 G_0(p)\gamma_5 G_0\times$$
$$\times (p\theta(\eta - \eta') - k)\gamma_5 \exp[2ipk(\eta - \eta') - ip^2|\eta - \eta'|], \tag{54}$$

после чего интегрирование (45), (46) вблизи решений полученных уравнений[1]. Аналогичное приближение по отношению к изотопспину сводится к замене в (43)

$$T_\alpha \exp\left[\int_0^\alpha \varepsilon_j(\xi)\frac{\delta}{\delta\eta_j(\xi)}d\xi\right] \to \exp\left[\varepsilon_j\int_0^\alpha \frac{\delta}{\delta\eta_j(\xi)}d\xi\right]. \tag{55}$$

Таким образом, получим в низшем приближении

$$C\langle D_{ij}(k)\rangle \cong i\int_0^\infty d\alpha \exp[-i\alpha(k^2 + \chi^2 - i\varepsilon)]\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Phi_{ij}(q)\exp\{A(q)\}, \tag{56}$$

[1] Аналогичная методика применима также и к общим уравнениям (36), (37).

где

$$\Phi_{ij}(q)=\int d^3x\,(e^{\varepsilon x})_{ij}\,e^{iqx}, \tag{57}$$

$$A(q)=i\lambda\left\langle\int_0^\alpha d\xi'\int_0^\alpha d\xi''\delta(x(\xi')-x(\xi''))\right\rangle+g^2\int_0^1 d\lambda\int_0^\alpha \mathrm{Sp}\,\Gamma_+(\xi,\xi)(1+q_j\tau_j)\,d\xi. \tag{58}$$

Причем в (58) $\Gamma_+(\xi,\xi')$ удовлетворяет уравнениям (45), (46), в которых ядра и неоднородности заменены (51) — (54), и, кроме того, положим

$$T_\pm(\xi)\to 1\pm q_j\tau_j. \tag{59}$$

Явная матричная форма величины $(e^{\varepsilon x})_{ij}$ выражается формулой

$$(e^{\varepsilon x})_{ij}=\left(\delta_{ij}-\frac{x_ix_j}{x^2}\right)\cos x+\frac{\varepsilon_{ijk}x_k}{x}\sin x+\frac{x_ix_j}{x^2}, \tag{60}$$

где $x=(x^2{}_j)^{1/2}$.

Несколько более корректное по отношению к изоспину приближение получается, если замену, аналогичную (55), произвести после реализации $\delta/\delta\eta$-операторов; в этом случае получим [1]

$$C\langle D_{ij}(k)\rangle\cong i\int_0^\infty d\alpha\exp\left[-i\alpha(k^2+\chi^2-i\varepsilon)\right]\times$$
$$\times\exp\left\{i\lambda\left\langle\int_0^\alpha d\xi'\int_0^\alpha d\xi''\delta(x(\xi')-x(\xi''))\right\rangle\right\}\times$$
$$\times\left(\exp\left\{g^2\int_0^1 d\lambda\int_0^\alpha \mathrm{Sp}\,\hat\Gamma_+(\xi,\xi)(1+i\varepsilon_s\tau_s)\,d\xi\right\}\right)_{ij}, \tag{61}$$

причем $\hat\Gamma_+(\xi,\xi')$, $\hat G_+(\xi,\xi')$ удовлетворяют уравнениям:

$$\hat\Gamma_{+ij}(\eta',\eta'')+g^2\lambda T_{+is}\int_0^\alpha\langle\Gamma^{(0)}_+(\eta'-\xi)\rangle\,\hat\Gamma_{+sj}(\xi,\eta'')\,d\xi+$$
$$+g^2\lambda T_{-is}\int_0^\alpha\langle\Gamma^{(0)}_{-+}(\eta'-\xi)\rangle\,\hat G_{+sj}(\xi,\eta'')\,d\xi=\delta_{ij}\langle\Gamma^{(0)}_{+}(\eta'-\eta'')\rangle, \tag{62}$$

$$\hat G_{+ij}(\eta',\eta'')+g^2\lambda T_{+is}\int_0^\alpha\langle G_0(\eta'-\xi)\rangle\,\hat\Gamma_{+sj}(\xi,\eta'')\,d\xi+$$
$$+g^2\lambda T_{-is}\int_0^\alpha\langle\Gamma^{(0)}_-(\eta'-\xi)\rangle\,\hat G_{+sj}(\xi,\eta'')\,d\xi=\delta_{ij}\langle G_0(\eta''-\eta'')\rangle, \tag{63}$$

$$T_{\pm ij}=\delta_{ij}\pm i\varepsilon_{ijk}\tau_k, \tag{64}$$

$$\langle G_0(\eta'-\eta'')\rangle\equiv\langle G_0(x(\eta')-x(\eta''))\rangle, \tag{65}$$

[1] Символ Sp относится в (61) только к спинорным индексам обычного и изотопического спина. При этом правая часть (61) остается матрицей по отношению к 3-мерным векторным индексам изопространства.

$$\langle \Gamma_{+}^{(0)}(\eta'-\eta'')\rangle \equiv \langle \Gamma_{+}^{(0)}(k(\eta'); x(\eta')-x(\eta''))\rangle, \tag{66}$$

$$\langle \Gamma_{-}^{(0)}(\eta'-\eta'')\rangle \equiv \langle \Gamma_{-}^{(0)}(k(\eta''); x(\eta')-x(\eta''))\rangle, \tag{67}$$

$$\langle \Gamma_{+-}^{(0)}(\eta'-\eta'')\rangle \equiv \langle \Gamma_{+-}^{(0)}(k(\eta'), k(\eta''); x(\eta')-x(\eta''))\rangle. \tag{68}$$

Обозначения (65) — (68) подчеркивают важную особенность — разностный характер ядер. Если рассматривать асимптотику одномезонной функции Грина вблизи полюса, что соответствует пределу $\alpha \to +\infty$, то система уравнений (62), (63) переходит в систему уравнений Винера — Хопфа, для которых получены точные результаты.

В качестве простейшей иллюстрации полученных результатов приведем выражение для одномезонной функции Грина в случае однокомпонентной $\frac{\lambda}{4}\varphi^4$ теории в пренебрежении квантовыми флуктуациями φ^2-поля

$$c\langle D(k)\rangle \cong i\int_0^\infty d\alpha \exp[-i\alpha(k^2+\chi^2-i\varepsilon)]\langle e^A\rangle, \tag{69}$$

где

$$A = i\lambda\int_0^\alpha d\xi' \int_0^\alpha d\xi''\delta(x(\xi'-x(\xi'')) + \int_0^\lambda d\lambda' \int_0^\alpha D(\xi,\xi\,|\,\lambda')\,d\xi; \tag{70}$$

$D(\xi, \xi' \mid \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$D(\xi',\xi''\,|\,\lambda) - 2\lambda\int_0^\alpha D^{(0)}(x(\xi')-x(\xi))\,D(\xi,\xi''\,|\,\lambda)\,d\xi = D^{(0)}(x(\xi')-x(\xi'')), \tag{71}$$

откуда

$$D(\xi,\xi''\,|\,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}(g(\xi',\xi'')-\delta(\xi'-\xi'')), \tag{72}$$

где $g(\xi', \xi'')$ удовлетворяет уравнению

$$g(\xi',\xi'') - 2\lambda\int_0^\alpha D^{(0)}(x(\xi')-x(\xi))\,g(\xi,\xi'')\,d\xi = \delta(\xi'-\xi''). \tag{73}$$

Будем итерировать уравнение (73) вблизи решения, аналогичного (73) уравнения, в котором произведена замена

$$D^{(0)}(x(\xi')-x(\xi'')) \to \langle D^{(0)}(x(\xi')-x(\xi''))\rangle. \tag{74}$$

Вводя на промежутке $[0, \alpha)$ интегральные операторы $D^{(0)}$ и $\langle D^{(0)}\rangle$ согласно

$$\langle \xi'\,|\,D^{(0)}\,|\,\xi''\rangle = D^{(0)}(x(\xi')-x(\xi'')), \tag{75}$$

$$\langle \xi'\,|\,\langle D^{(0)}\rangle\,|\,\xi''\rangle = \langle D^{(0)}(x(\xi')-x(\xi''))\rangle, \tag{76}$$

можно представить решение операторного аналога уравнения (73) в виде

$$g = \frac{1}{1-2\lambda D^{(0)}} = \frac{1}{1-2\lambda(\langle D^{(0)}\rangle + D^{(0)} - \langle D^{(0)}\rangle)} =$$

$$= \frac{1}{1-2\lambda\langle D^{(0)}\rangle}\,\frac{1}{1-2\lambda(D^{(0)}-\langle D^{(0)}\rangle)\dfrac{1}{1-2\lambda\langle D^{(0)}\rangle}} = g_1\sum_{n=0}^\infty \{2\lambda(\Delta D^{(0)})g_1\}^n, \tag{77}$$

где $\Delta D^{(0)}$ — «линейная флуктуация» $D^{(0)}$:

$$\Delta D^{(0)} \equiv D^{(0)} - \langle D^{(0)} \rangle, \tag{78}$$

$$g_1 = \frac{1}{1 - 2\lambda \langle D^{(0)} \rangle}, \tag{79}$$

так что $g_1(\xi', \xi'') \equiv \langle \xi' \mid g_1 \mid \xi'' \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$g_1(\xi', \xi'') - 2\lambda \int_0^\alpha \langle D^{(0)}(x(\xi') - x(\xi)) \rangle g_1(\xi, \xi'') \, d\xi = \delta(\xi' - \xi''). \tag{80}$$

Низший член итерационного ряда (77) совпадает с решением уравнения (80); последующие члены учитывают флуктуационные поправки. Таким образом, в низшем приближении модифицированной теории возмущений следует положить в (69)

$$\langle e^A \rangle \to e^{\langle A \rangle},$$

где

$$\langle A \rangle = i\lambda \left\langle \int_0^\alpha d\xi' \int_0^\alpha d\xi'' \delta(x(\xi') - x(\xi'')) \right\rangle + \int_0^\lambda d\lambda' \int_0^\alpha D_1(\xi, \xi \mid \lambda) \, d\xi, \tag{81}$$

причем $D_1(\xi', \xi'')$ формулой (72) связано с $g_1(\xi', \xi'')$.

Важнейшее свойство уравнения (80) — разностный характер ядра, явный вид которого легко получается после осреднения:

$$\langle D^{(0)}(x(\xi') - x(\xi'')) \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp(2ipk\eta - ip^2 |\eta|) \, i \times$$
$$\times \int_0^\infty \exp[-i\alpha(p^2 + \chi^2 - i\varepsilon)] \, d\alpha = \int_0^1 \frac{dt}{(4\pi)^2 |\eta|} \exp\left\{i\left[k^2 t - \left(\frac{1}{t} - 1\right)\chi^2\right] |\eta|\right\}, \tag{82}$$

где

$$\eta = \xi' - \xi''. \tag{83}$$

Как видно из (82), ядро уравнения (80) имеет при $\eta \to 0$ поведение

$$\sim \frac{1}{|\eta|}.$$

Чтобы регуляризовать уравнение, вычтем из (82) аналогичное выражение с заменой $\chi^2 \to M^2$, где M — обрезающая масса; тогда ядро (82), которое будем далее обозначать $\langle D^{(0)}(\eta) \rangle$, заменится на

$$\langle D_R^{(0)}(\eta) \rangle = \int_0^1 \frac{dt}{(4\pi)^2 |\eta|} \left[\exp\left(-i\left(\frac{1}{t} - 1\right) |\eta| \chi^2\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(-i\left(\frac{1}{t} - 1\right) |\eta| M^2\right] \exp ik^2 t |\eta|. \tag{84}$$

Решение уравнения (80) с ядром (84) может быть получено в замкнутой форме, если рассмотреть предельный случай $\alpha \to \infty$, что соответствует асимптотике одномезонной функции Грина вблизи полюса. В этом случае окончательно будем иметь для $g_1(\xi', \xi'')$ уравнения Винера — Хопфа

$$g_1(\xi', \xi'') - 2\lambda \int_0^\infty \langle D_R^{(0)}(\xi' - \xi) \rangle g_1(\xi, \xi'') \, d\xi = \delta(\xi' - \xi''). \tag{85}$$

Решение этого уравнения выражается через фурье-образ ядра, для которого имеем

$$\langle D_R^{(0)}(\omega)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\eta}\langle D_R^{(0)}(\eta)\rangle\, d\eta = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(4\pi)^2}\ln\frac{[(1-t)M^2-k^2t^2-i\varepsilon]^2-(\omega t)^2}{[(1-t)\chi^2-k^2t^2-i\varepsilon]^2-(\omega t)^2}. \tag{86}$$

Таким образом для $g_1(\xi'\xi'')$ получаем:

$$g_1(\xi',\xi'') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega''}{2\pi}\, i\,\frac{\exp(-i\omega'\xi'+i\omega''\xi'')}{\omega'-\omega''+i\delta}\,\sigma_+(\omega')\,\sigma_-(\omega''), \tag{87}$$

где

$$\sigma_\pm(\omega) = \exp\left\{\mp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\eta-\omega\pm i\delta_1}\ln E(\eta)\right\}, \tag{88}$$

$$E(\omega) = 1-2\lambda\langle D_R^{(0)}(\omega)\rangle, \tag{89}$$

$$\delta,\delta_1\to+0. \tag{90}$$

После перехода к пределу (90) найдем из (87)

$$g_1(\xi',\xi'') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega''}{2\pi}\, i\,\frac{\exp(-i\omega'\xi'+i\omega''\xi'')}{\omega'-\omega''}\,(E(\omega')E(\omega''))^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\omega'-\omega'')\,d\omega}{(\omega-\omega')(\omega-\omega'')}\ln E(\omega)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\exp[-i\omega(\xi'-\xi'')]\,E^{-1}(\omega). \tag{91}$$

Таким образом для $D_1(\xi'\xi''\mid\lambda)$, входящего в (81), получим

$$2\lambda D_1(\xi',\xi''\mid\lambda) = \gamma_+(|\xi'-\xi''|)+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega''}{2\pi}\, i\,\frac{\exp(-i\omega'\xi'+i\omega''\xi'')}{\omega'-\omega''+i\delta}\,\tilde\gamma_+(\omega')\,\tilde\gamma_-(\omega''), \tag{92}$$

где

$$\tilde\gamma_\pm(\omega) = \sigma_\pm(\omega)-1, \tag{93}$$

$$\gamma_+(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,e^{-i\omega\eta}\,\tilde\gamma_\pm(\omega). \tag{94}$$

Приведем также значение входящей в (81) величины

$$F(\alpha,k^2) = i\,\frac{\lambda}{4}\left\langle\int\limits_0^\alpha d\xi'\int\limits_0^\alpha d\xi''\delta(x(\xi')-x(\xi''))\right\rangle. \tag{95}$$

Регуляризация $F(\alpha,k^2)$ производится заменой

$$\delta(x)\to\bar\delta(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp(ipx-ip^2\alpha_0). \tag{96}$$

Выполняя осреднение, получаем

$$\langle\bar\delta(x(\xi')-x(\xi''))\rangle = \bar\delta\left(2k(\xi'-\xi'')+(-i)\int\limits_{\xi''}^{\xi'}\frac{\delta}{\delta u(\zeta)}\,d\zeta\right)\times$$
$$\times\exp\left[-i\int\limits_0^\alpha u^2(\zeta)\,d\zeta\right]\Big|_{u=0} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp[2ipk(\xi'-\xi'')-ip^2(\alpha_0+|\xi'-\xi''|)] =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^2 i}\,\frac{\exp\left(i\,\dfrac{k^2\eta^2}{\alpha_0+|\eta|}\right)}{(\alpha_0+|\eta|)^2},\quad \eta=\xi'-\xi''. \tag{97}$$

Таким образом,

$$F_R(\alpha, k^2) = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2}\int_0^\alpha d\eta\,(\alpha-\eta)\,\frac{\exp\left(i\,\dfrac{k^2\eta^2}{\alpha_0+\eta}\right)}{(\alpha_0+\eta)^2}. \tag{98}$$

При $\alpha_0 \to 0$ выделение расходящихся членов дает

$$F_R(\alpha, p^2)\big|_{\alpha_0\to 0} \cong \frac{\lambda}{2(4\pi)^2}\Big\{M^2\alpha + (ip^2\alpha - 1)\Big[\int_0^\alpha \frac{d\eta}{\eta}\,(e^{ip^2\eta}-1) + \ln M^2\alpha\Big] - \\ - e^{ip^2\alpha} - \frac{1}{2}\,ip^2\alpha + 1\Big\}, \tag{99}$$

где

$$M^2 = \frac{1}{\alpha_0}.$$

Таким образом, для одномезонной функции Грина в этом приближении получим

$$C\langle D(k)\rangle \cong i\int_0^\infty \exp\Big\{-i\alpha(k^2+\chi^2-i\varepsilon) + F_R(\alpha, k^2) + \\ + \int_0^\lambda d\lambda' \int_0^\alpha D_1(\xi, \xi\,|\,\lambda')\,d\xi\Big\}, \tag{100}$$

где $F_R(\alpha, k^2)$ дается (99), а величина $D_1(\xi, \xi'\,|\,\lambda)$ определяется (92).

Примечание при корректуре

При нахождении решения уравнения (6) (разд. 3) для функции Грина $D_{ij}(x, y\,|\,Q, \mathbf{R})$ во внешнем билокальном поле:

$$P_{ij}(x, y) = S(x, y)\,\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}A_k(x, y), \tag{П.1}$$

где

$$S(x, y) = Q(x, y) + Q(y, x), \tag{П.2}$$

$$A_k(x, y) = R_k(x, y) - R_k(y, x) \tag{П.3}$$

мы сталкиваемся с необходимостью распутывания T-произведения как орбитальных операторов $(x, \partial/\partial x)$, так и операторов ε_j, имеющих матричные элементы $(\varepsilon_j)_{ik} = \varepsilon_{jik}$ и действующих в изотопическом пространстве. Выражение (23) (разд. 3) включает формально нераскрытую T-экспоненту по операторам ε_j. Оказывается, однако, возможным представить указанную T-экспоненту в виде нормальной операторной формы по антикоммутирующим переменным.

Не останавливаясь на доказательстве, приведем здесь окончательный результат для функции Грина, удовлетворяющей уравнению (6) (разд. 3). Вместо (23) (разд. 3) получим:

$$D_{ij}(x, y\,|\,Q, \mathbf{R}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{ik(x-y)}\,i\int_0^\infty d\alpha\,e^{-i\alpha(k^2+\varkappa^2-i\varepsilon)}\times \\ \times\Big\langle \exp\Big\{i\int_0^\alpha d\alpha' \int d^4z\,\Big[S(x(\alpha'), x(\alpha')+z) -$$

$$-\frac{1}{4}\mathbf{F}(\alpha')\,\mathbf{A}(x(\alpha'),\,x(\alpha')+z)\,e^{izk(\alpha')}\Big\}\Big\rangle\,Y_{ij}(\alpha\,|\,\eta_1,\,\eta_2)\,|_{\eta_1=\eta_2=0}, \tag{П.4}$$

где

$$\mathbf{F}(\alpha')=\frac{\delta}{\delta\eta_1(\alpha')}\times\frac{\delta}{\delta\eta_1(\alpha')}-\frac{\delta}{\delta\eta_2(\alpha')}\times\frac{\delta}{\delta\eta_2(\alpha')}, \tag{П.5}$$

$$Y_{ij}(\alpha\,|\,\eta_1,\,\eta_2)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha d\xi'\int\limits_0^\alpha d\xi''\,[\eta_1(\xi')\,\eta_1(\xi'')-\eta_2(\xi')\,\eta_2(\xi'')]\,\varepsilon(\xi'-\xi'')\right\}\times$$

$$\times\left\{\delta_{ij}\left(1+\frac{1}{2}(L_1L_2)^2\right)-(L_1L_2)(L_{1i}L_{2j}+L_{1j}L_{2i})+L_{1i}L_{1j}-L_{2i}L_{2j}\right\}, \tag{П.6}$$

$$\mathbf{L}_j=\int\limits_0^\alpha \boldsymbol{\eta}_j(\xi)\,d\xi, \tag{П.7}$$

операторы удовлетворяют соотношениям антикоммутации

$$[\eta_j(\xi),\,\eta_r(\xi')]_+=\left[\frac{\delta}{\delta\eta_j(\xi)},\,\frac{\delta}{\delta\eta_r(\xi')}\right]_+=0,$$
$$\left[\frac{\delta}{\delta\eta_j(\xi)},\,\eta_r(\xi')\right]_+=\delta_{jr}\delta(\xi-\xi'), \tag{П.8}$$

остальные обозначения те же, что и в (23) (разд. 3).

Используя (П. 4) и действуя методом, описанным после формулы (24) (разд. 3), получим для производящего функционала выражение:

$$CZ=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n n!}\prod_{s=1}^{n}\int\frac{d^4k_s\,d^4x_s}{(2\pi)^4}\exp(ik_sx_s)\int\limits_0^\infty d\alpha_s\exp\left[-i\alpha_s(k_s^2-\chi^2-i\varepsilon)\right]\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r r!}\prod_{s_1=1}^{r}\int\frac{d^4k'_{s_1}\,d^4x'_{s_1}}{(2\pi)^4}\int\limits_0^\infty\frac{d\alpha'_{s_1}}{\alpha'_{s_1}}\exp\left[-i\alpha'_{s_1}(k'^2_{s_1}+\chi^2-i\varepsilon)\right]\langle\exp\{A_{nr}\}\rangle\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{n}J_i(x_s)\,Y_{ij}(\alpha_s\,|\,\eta_{1s},\,\eta_{2s})\,\tilde{J}_j(k_s)\prod_{s_1=1}^{n}Y_{ff}(\alpha'_{s_1}\,|\,\eta'_{1s_1},\,\eta'_{2s_2})\Big|_{\eta=\eta'=0}, \tag{П.9}$$

где A_{nr} дается формулой (26) (разд. 3), в которой $Q^{(nr)}$ определяется (27) (разд. 3), а $R_j^{(nr)}(x,\,y)$ следует заменить на

$$R_j^{(nr)}(x,\,y)=-\frac{1}{4}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_0^{\alpha_s}[\delta(x-x_s(\xi))\exp\{-i(x-y)\,k_s(\xi)\}-$$
$$-\delta(y-x_s(\xi))\exp\{i(x-y)\,k_s(\xi)\}\,F_{sj}(\xi)\,d\xi-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{s=1}^{r}\int\limits_0^{\alpha'_s}[\delta(x-x'_s(\xi))\exp\{-i(x-y)\,k'_s(\xi)\}-$$
$$-\delta(y-x'_s(\xi))\exp\{i(x-y)\,k'_s(\xi)\}]\,F'_{sj}(\xi)\,d\xi, \tag{П.10}$$

где

$$\mathbf{F}_s(\xi)=\frac{\delta}{\delta\eta_{1s}(\xi)}\times\frac{\delta}{\delta\eta_{1s}(\xi)}-\frac{\delta}{\delta\eta_{2s}(\xi)}\times\frac{\delta}{\delta\eta_{2s}(\xi)}, \tag{П.11}$$

$\mathbf{F}'_s(\xi)$ получается из (П.11) заменой $\eta_{1,\,2s}\to\eta'_{1,\,2s}$.

Остальные обозначения в (П. 9) те же, что и в (25) (разд. 3). Для входящей в (26) (разд. 3) величины П $(Q^{(nr)}, R^{(nr)}$ будем иметь формулу (32) (разд. 3), в которой необходимо заменить $T_{\pm}^{(s)}(\xi)$ и $T_{\pm}^{\prime(s)}(\xi)$ на

$$T_{\pm}^{(s)}(\xi) = 1 \mp \frac{i}{4} \mathbf{F}^{(s)}(\xi)\,\boldsymbol{\tau},$$
$$T_{\pm}^{\prime(s)}(\xi) = 1 \mp \frac{i}{4} \mathbf{F}^{\prime(s)}(\xi)\,\boldsymbol{\tau}. \qquad (\text{П.12})$$

Система производящих уравнений (36) — (40) (разд. 3) сохраняет свой вид, если там сделать подстановку (П. 12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. С. Фрадкин. Докл. АН СССР, 98, 47 (1954); 100, 879 (1954).
2. Е. С. Фрадкин. Труды ФИАН, 29 (1965); Acta Phys. Hung, 19, 176 (1965); Nucl. Phys., 76, 588 (1966).
3. H. D. Dahmen, G. Iona-Lasino. Nouvo Cimento, 52A, 807 (1967).