АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. П. Н. ЛЕБЕДЕВА

1990 Том 201

УДК 530.145

В. П. БАРАШЕВ, Д. М. ГИТМАН, Е. С. ФРАДКИН, Ш. М. ШВАРЦМАН

ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С НЕСТАБИЛЬНЫМ ВАКУУМОМ. РЕДУКЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ЧАСТИЦ, РОЖДЕННЫХ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

1. Введение

Настоящая работа фактически состоит из двух частей. В первой части (разд. 2, 3) обсуждаются редукционные формулы (РФ) для процессов переходов и средних значений физических величин. Вторая часть (разд. 4) посвящена построению матриц плотности частиц, рожденных внешним полем из вакуума с учетом всех радиационных поправок.

Коротко коснемся предыстории рассматриваемых вопросов. В работах [1—6] на примере КЭД был развит общий подход к квантовополевым теориям с внешним полем, в котором вакуум является неустойчивым. Основной задачей указанных работ было построение теории возмущений по радиационному взаимодействию с точным учетом внешнего поля. Фактически это обобщение картины Фарри на поля подобного типа. В частности, было показано, что можно сохранить фейнмановскую структуру рядов теории возмущений для матричных элементов процессов переходов, средних значений физических величин [2, 5] и полных вероятностей радиационных процессов [3—6], подбирая в каждом случае нужным образом пропагаторы заряженных частиц и внешние концы диаграмм. Нетривиальной в случае теорий с нестабильным вакуумом оказывается запись РФ для таких величин.

В первой части настоящей работы мы последовательно приведем все результаты, относящиеся к построению РФ в КЭД с внешним электромагнитным полем, нарушающим стабильность вакуума. В разд. 2 получены РФ для матричных элементов процессов переходов, а в разд. 3 построены матричные РФ для средних значений физических величин и полных вероятностей радиационных процессов. Решение этой проблемы для произвольной квантовой теории может быть проведено по аналогии с КЭД.

В работе [7] при изучении процессов квантового рождения частиц в интенсивном гравитационном поле черных дыр было обнаружено, что соответствующее излучение имеет тепловой спектр. Более того, оказалось, что все высшие корреляционные функции также совпадают с соответствующими функциями теплового излучения. Таким образом, излучение от стационарных черных дыр описывается равновесной матрицей плотности и температурой Θ, определяемой параметрами черной дыры: $\Theta = (2\pi kGM)^{-1}$ [8—12].

Для выяснения роли гравитационного поля в формировании такого спектра в работах [13—16] рассмотрена аналогичная задача в КЭД и вычислена матрица плотности, описывающая частицы одного сорта (электроны или позитроны), рожденные из вакуума. В работах [13—16] дана интерпретация роли принципа эквивалентности в тепловом характере рождения частиц в гравитационном поле. Помимо этого, найдено общее выражение [16] для матрицы плотности рожденных внешним полем частиц из произвольного начального состояния и дан анализ влияния начального состояния на тепловой характер конечного распределения. Все эти результаты получены без учета радиационного взаимодействия между частицами.

В разд. 4 настоящей работы найдены матрицы плотности частиц, рожденных во внешнем поле из произвольного начального состояния с учетом радиационного взаимодействия. Начальное состояние может быть вакуумным или состоянием с определенным числом заряженных частиц и фотонов. Кроме того, получены выражения для среднего числа электронов и позитронов с учетом радиационного взаимодействия.

2. Редукционные формулы для матричных элементов процессов перехода

Матричный элемент процесса перехода во внешнем поле записывается в виде [1, 2] [1]

$$M_{\text{in}\to\text{out}} = \langle 0, \widetilde{\text{out}} \,|\, \tilde{a}_{n_1}(\text{out}) \ldots \tilde{a}_{n_s}(\text{out})\, \tilde{b}_{m_1}(\text{out}) \ldots \tilde{b}_{m_j}(\text{out})\, c_{l_1} \ldots \\ \ldots c_{l_a} S c^+_{\varkappa_1} \ldots c^+_{\varkappa_b} b^+_{q_1}(\text{in}) \ldots b^+_{q_r}(\text{in})\, a^+_{p_1}(\text{in}) \ldots a^+_{p_d}(\text{in}) \,|\, 0, \text{in}\rangle, \tag{2.1}$$

где b^+ (in), a^+ (in), c^+ — операторы рождения позитронов, электронов и фотонов в начальном состоянии в момент времени $t = t_{\text{in}}$; $|\,0, \text{in}\rangle$ — вакуумный вектор начального состояния (q, p, $\varkappa$ ($\varkappa = \mathbf{k}, \lambda$) — квантовые числа начальных частиц);

$$\tilde{a}\,(\text{out}) = U_0^{-1} a\,(\text{out})\, U_0, \quad \tilde{b}\,(\text{out}) = U_0^{-1} b\,(\text{out})\, U_0; \\ \langle 0, \widetilde{\text{out}}\,| = \langle 0, \text{out}\,|\, U_0; \quad U_0 = U_0\,(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}); \tag{2.2}$$

a (out), b (out), c — операторы уничтожения электронов, позитронов и фотонов в конечном состоянии в момент времени $t = t_{\text{out}}$; $\langle 0, \text{out}\,|$ — вакуумный вектор конечного состояния (n, m, l — квантовые числа конечных частиц); U_0 (t_{out}, t_{in}) — оператор эволюции электрон-позитронного поля во внешнем электромагнитном поле; S — матрица рассеяния.

При вычислении матричных элементов (2.1) во внешнем поле, нарушающем стабильность вакуума, матрицу рассеяния S удобно приводить к нормальной форме относительно вакуумов $|\,0, \text{in}\rangle$ и $\langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|$. ($\langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\, \tilde{a}^+(\text{out}) = \langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\, \tilde{b}^+(\text{out}) = 0$):

$$S = \sum_{K, L=0}^{\infty} \tilde{S}_{K,L}, \\ \tilde{S}_{KL} = \int \tilde{S}^{\mu_1\ldots\mu_L}_{K,L}(x, y, z)\, \tilde{N}\,(\overline{\psi}(x_1) \ldots \overline{\psi}(x_K)\, \psi(y_1) \ldots \\ \ldots \psi(y_K)\, A_{\mu_1}(z_1) \ldots A_{\mu_L}(z_L))\, dx\, dy\, dz, \\ \langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\, \tilde{N}(\ldots)\,|\, 0, \text{in}\rangle = 0, \tag{2.3}$$

где ψ (x), $\overline{\psi}$ (x), A (x) — операторы спинорного и электромагнитного полей в представлении взаимодействия по внешнему полю.

В результате теория возмущений для матричных элементов (2.1) строится с помощью пропагаторов [1, 2] (мы используем лоренцеву калибровку электромагнитного поля):

$$\tilde{S}^c(x, y) = i c_v^{-1} \langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\, T\psi(x)\, \overline{\psi}(y)\,|\, 0, \text{in}\rangle, \\ D^c_{0\mu\nu}(x - y) = -i c_v^{-1} \langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\, T A_\mu(x)\, A_\nu(y)\,|\, 0, \text{in}\rangle = \eta_{\mu\nu} D^c_0(x - y), \\ c_v = \langle 0, \text{out}\,|\, U_0\,|\, 0, \text{in}\rangle = \langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\, 0, \text{in}\rangle. \tag{2.4}$$

[1] В настоящей работе используются результаты и обозначения работ [1, 2, 5].

Подставим (2.3) в (2.1). Тогда [5]:

$$M_{\text{in}\to\text{out}} = \sum_{k=0}^{s+r}\sum_{M=0}^{a+b}\sum_{L_1, L_2}(-1)^{\varepsilon}\,\widetilde{\mathcal{T}}\,(\underbrace{\overset{+}{n}\dots}_{L_1}\underbrace{\overline{m}\dots}_{L_2}\underbrace{l\dots}_{a-M}|\underbrace{\varkappa\dots}_{b-M}\underbrace{\overline{q}\dots}_{K-L_1}\underbrace{\overset{+}{p}\dots}_{K-L_2})\times$$
$$\times\,\omega\,(\underbrace{\overset{+}{n}\dots}_{s-L_1}\underbrace{\overline{m}\dots}_{j-L_2}|\underbrace{\overline{q}\dots}_{r+L_1-K}\underbrace{\overset{+}{p}\dots}_{d+L_2-K})\,\omega^{\gamma}(\underbrace{l\dots}_{M}|\underbrace{\varkappa\dots}_{M})\,c_v, \tag{2.5}$$

где сумма по L_1 ($\max\{0, K-r\}\leqslant L_1\leqslant\min\{s, K\}$) — это сумма по всем разбиениям группы квантовых чисел $n_1\dots n_s$ на две подгруппы из L_1 и $s-L_1$ элементов и группы квантовых чисел $q_1\dots q_r$ на две подгруппы из $K-L_1$ и $r+L_1-K$ элементов (в каждой из подгрупп сохраняется исходная иерархия расположения квантовых чисел); сумма по L_2 ($\max\{0, K-d\}\leqslant L_2\leqslant\min\{j, K\}$) — это сумма по всем разбиениям группы квантовых чисел $m_1\dots m_j$ на две подгруппы из L_2 и $j-L_2$ элементов и группы квантовых чисел $p_1\dots p_d$ на две подгруппы из $K-L_2$ и $d+L_2-K$ элементов (в каждой из подгрупп сохраняется исходная иерархия расположения квантовых чисел); ε — четность перестановки из

$$\overset{+}{n}_1\dots\overset{+}{n}_s, \overline{m}_1\dots\overline{m}_j, \overline{q}_1\dots\overline{q}_r, \overset{+}{p}_1\dots\overset{+}{p}_d \text{ в}$$
$$\underbrace{\overset{+}{n}\dots}_{L_1}\underbrace{\overline{q}\dots}_{K-L_1}\underbrace{\overline{m}\dots}_{L_2}\underbrace{\overset{+}{p}\dots}_{K-L_2}\underbrace{\overset{+}{n}\dots}_{s-L_1}\underbrace{\overline{m}\dots}_{j-L_2}\underbrace{\overline{q}\dots}_{r+L_1-K}\underbrace{\overset{+}{p}\dots}_{d+L_2-K},$$

а сумма по M — сумма по всем разбиениям группы квантовых чисел $l_1\dots l_a$ на две подгруппы из $a-M$ и M элементов и группы квантовых чисел $\varkappa_1\dots\varkappa_b$ на две подгруппы из $b-M$ и M элементов (в каждой из подгрупп сохраняется исходная иерархия расположения квантовых чисел).

Кроме того, в (2.5) введено обозначение

$$\widetilde{\mathcal{T}}\,(\overset{+}{n}_1\dots\overset{+}{n}_{K_1}\overline{m}_1\dots\overline{m}_{K_2}l_1\dots l_{N_1}|\varkappa_1\dots\varkappa_{N_2}\overline{q}_1\dots\overline{q}_{K_3}\overset{+}{p}_1\dots\overset{+}{p}_{K_4}) =$$
$$= \langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\,\tilde{a}_{n_1}(\text{out})\dots\tilde{a}_{n_{K_1}}(\text{out})\,\tilde{b}_{m_1}(\text{out})\dots\tilde{b}_{m_{K_2}}(\text{out})\,c_{l_1}\dots$$
$$\dots c_{l_{N_1}}S_{K,L}c^{+}_{\varkappa_1}\dots c^{+}_{\varkappa_{N_2}}b^{+}_{q_1}(\text{in})\dots b^{+}_{q_{K_3}}(\text{in})\,a^{+}_{p_1}(\text{in})\dots a^{+}_{p_{K_4}}(\text{in})\,|\,0\text{ in}\rangle$$
$$(K_1+K_2=K_3+K_4=K,\ N_1+N_2=L) \tag{2.6}$$

— сумма всех фейнмановских диаграмм, начальные и конечные линии которых отвечают электронам (+), позитронам (—) и фотонам в состояниях с квантовыми числами, указанными в аргументе $\widetilde{\mathcal{T}}\,(\dots|\dots)$ (справа начальные состояния, слева конечные). При этом электрону и позитрону в конечном состоянии сопоставляются функции [1, 2]:

$$^{+}\overline{\psi}_n(x) = \sum_l \omega\,(\overset{+}{n}\,|\,\overset{+}{l})\,{}_{+}\overline{\varphi}_l(x), \qquad {}^{-}\psi_n(x) = \sum_l \omega\,(\overline{n}\,|\,\overline{l})\,{}_{-}\varphi_l(x), \tag{2.7}$$

электрону и позитрону в начальном состоянии:

$${}_{+}\psi_n(x) = \sum_l {}^{+}\varphi_l(x)\,\omega\,(\overset{+}{l}\,|\,\overset{+}{n}), \qquad {}_{-}\overline{\psi}_n(x) = \sum_l {}^{-}\overline{\varphi}_l(x)\,\omega\,(\overline{l}\,|\,\overline{n}), \tag{2.8}$$

фотону в начальном состоянии:

$${}_{+}f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) = (2V\omega_{\mathbf{k}})^{-1/2}e_\mu(\mathbf{k}, \lambda)\exp\{-ikx+ik_0t_{\text{in}}\}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = k_0 = |\,\mathbf{k}\,| \tag{2.9}$$

$e_\mu(\mathbf{k}, \lambda)$ — вектор поляризации фотона, а в конечном состоянии

$${}_{-}f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) = (2V\omega_{\mathbf{k}})^{-1/2}e_\mu(\mathbf{k}, \lambda)\exp\{ikx-ik_0t_{\text{in}}\}. \tag{2.10}$$

Кроме того, в (2.5), (2.7), (2.8)

$$\omega\,(\overset{+}{n}\dots\overline{m}\dots|\,\overline{q}\dots\overset{+}{p}\dots) = c_v^{-1}\langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\,\tilde{a}_n(\text{out})\dots\tilde{b}_m(\text{out})\dots$$
$$\dots b^{+}_q(\text{in})\dots a^{+}_p(\text{in})\dots|\,0, \text{in}\rangle \tag{2.11}$$

— относительная амплитуда вероятности процессов нулевого порядка по радиационному взаимодействию,

$$\omega^{\gamma}(l\ \ldots\ |\ \varkappa\ \ldots) = c_v^{-1}\langle 0,\ \widetilde{\mathrm{out}}\ |\ c_l\ \ldots\ c_\varkappa^+\ \ldots\ |\ 0,\ \mathrm{in}\rangle$$

— тривиальный фактор, представляющий собой сумму произведений δ-символов от соответствующих квантованных чисел фотонов, а $\{\pm\varphi_l(x)\}$ и $\{^\pm\varphi_l(x)\}$ — две полные ортонормированные системы решений уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле, удовлетворяющих начальным условиям

$$_\pm\varphi_l(\mathbf{x},\ t_{\mathrm{in}}) = {}_\pm\varphi_l(\mathbf{x}),\quad {}^\pm\varphi_l(\mathbf{x},\ t_{\mathrm{out}}) = {}^\pm\varphi_l(\mathbf{x}),$$

порождающие введенные ранее in и $\widetilde{\mathrm{out}}$ операторы рождения и уничтожения [1, 2]:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_n\{{}_+\varphi_n(x)\,a_n(\mathrm{in}) + {}_-\varphi_n(x)\,b_n^+(\mathrm{in})\} =\\ &= \sum_n\{{}^+\varphi_n(x)\,\tilde a_n(\mathrm{out}) + {}^-\varphi_n(x)\,\tilde b_n^+(\mathrm{out})\},\\ \bar\psi(x) &= \sum_n\{{}_+\bar\varphi_n(x)\,a_n^+(\mathrm{in}) + {}_-\bar\varphi_n(x)\,b_n(\mathrm{in})\} =\\ &= \sum_n\{{}^+\bar\varphi_n(x)\,\tilde a_n^+(\mathrm{out}) + {}^-\bar\varphi_n(x)\,\tilde b_n(\mathrm{out})\}.\end{aligned}\qquad(2.12)$$

Отметим, что величины (2.6) можно выразить через коэффициенты функции $\bar S_{K,\,L}(x,\ y,\ z)$ из (2.3). С другой стороны, как показано в [2, 5], коэффициентные функции выражаются через точные функции Грина:

$$\begin{aligned}\mathscr{G}^{\mu_1\ldots\mu_L}(x, y, z) &= C_V^{-1}\langle 0, \widetilde{\mathrm{out}}\,|\,ST\check\psi(x_1)\ldots\check\psi(x_k)\check{\bar\psi}(y_1)\ldots\check{\bar\psi}(y_k)\,\check A^{\mu_1}(z_1)\ldots\\ &\ldots\check A^{\mu_L}(z_L)\,|\,0, \mathrm{in}\rangle = C_V^{-1}\langle 0, \widetilde{\mathrm{out}}\,|\,T\psi(x_1)\ldots\psi(x_k)\,\bar\psi(y_1)\ldots\\ &\ldots\bar\psi(y_k)\,A^{\mu_1}(z_1)\ldots A^{\mu_L}(z_L)\,S\,|\,0, \mathrm{in}\rangle,\end{aligned}\qquad(2.13)$$

где

$$C_V = \langle 0,\ \widetilde{\mathrm{out}}\ |\ S\ |\ 0,\ \mathrm{in}\rangle;$$

$\check\psi(x)$, $\check{\bar\psi}(y)$, $\check A_\mu(z)$ — операторы спинорного и электромагнитного полей в представлении Гайзенберга. Это позволяет выразить матричный элемент (2.1) через точные функции Грина (2.13). Например:

$$\begin{aligned}&\langle 0, \widetilde{\mathrm{out}}\,|\,\tilde a_n(\mathrm{out})\,\tilde b_m(\mathrm{out})\,Sb_q^+(\mathrm{in})\,a_p^+(\mathrm{in})\,|\,0, \mathrm{in}\rangle\,c_V^{-1} =\\ &= \lim_{\substack{x_1^0 > y_1^0 \to t_{\mathrm{in}}\\ y_2^0 < x_2^0 \to t_{\mathrm{out}}}} \int {}^+\varphi_n^+(x_1)\,{}_-\varphi_q^+(x_2)\,\mathscr{G}_{2,0}(x_1, x_2, y_1, y_2)\,\gamma^0\,{}^-\varphi_m(y_1)\,\gamma^0\times\\ &\times\varphi_p(y_2)\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2.\end{aligned}\qquad(2.14)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (2.12), выразив операторы рождения и уничтожения частиц через полевые операторы $\psi(x)$ и $\bar\psi(x)$, и, устремляя время к t_{in} или t_{out}, расположили их нужным образом справа и слева от матрицы рассеяния S, образовав функции Грина (2.13).

Формулы типа (2.14) можно записать и в ковариантном виде (редукционные формулы). Для этого введем функции [5]

$$\begin{aligned}{}_+\Psi_n(x) &= -i\int \bar S^c(x, \mathbf{y}, t_{\mathrm{in}})\,\gamma^0\,{}_+\varphi_n(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\\ {}^-\Psi_n(x) &= i\int \bar S^c(x, \mathbf{y}, t_{\mathrm{out}})\,\gamma^0\,{}^-\varphi_n(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\\ {}^+\bar\Psi_n(x) &= -i\int {}^+\varphi_n^+(\mathbf{y})\,\bar S^c(\mathbf{y}, t_{\mathrm{out}}, x)\,d\mathbf{y},\\ {}_-\bar\Psi_n(x) &= i\int {}_-\varphi_n^+(\mathbf{y})\,\bar S^c(\mathbf{y}, t_{\mathrm{in}}, x)\,d\mathbf{y}\end{aligned}\qquad(2.15)$$

со следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\vec{\mathscr{D}}_{x+}\Psi_n(x) = i\gamma^0{}_+\varphi_n(\mathbf{x})\,\delta(t-t_{\text{in}}),\\
&\quad {}_+\Psi_n(x) = {}_+\psi_n(x),\quad t > t_{\text{in}},\\
&\vec{\mathscr{D}}_x{}^-\Psi_n(x) = -i\gamma^{0-}\varphi_n(\mathbf{x})\,\delta(t-t_{\text{out}}),\\
&\quad {}^-\Psi_n(x) = {}^-\psi_n(x),\quad t < t_{\text{out}},\\
&{}^+\overline{\Psi}_n(x)\overleftarrow{\mathscr{D}}_x = -i{}^+\overline{\varphi}_n(\mathbf{x})\,\gamma^0\delta(t-t_{\text{out}}),\\
&\quad {}^+\overline{\Psi}_n(x) = {}^+\overline{\psi}_n(x),\quad t < t_{\text{out}},\\
&{}_-\overline{\Psi}_n(x)\overleftarrow{\mathscr{D}}_x = i{}_-\overline{\varphi}_n(\mathbf{x})\,\gamma^0\delta(t-t_{\text{in}}),\\
&\quad {}_-\overline{\Psi}_n(x) = {}_-\overline{\psi}_n(x),\quad t > t_{\text{in}},\\
&\vec{\mathscr{D}}_x = \gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu^{\text{ext}}(x)) - m,\\
&\overleftarrow{\mathscr{D}}_x = \gamma^\mu(i\overleftarrow{\partial}_\mu + eA_\mu^{\text{ext}}(x)) + m,
\end{aligned}\tag{2.16}$$

а функции ${}^-_+\psi_n(x)$ и ${}^+_-\overline{\psi}_n(x)$ определены формулами (2.7) и (2.8). Тогда матричный элемент (2.14) можно записать так:

$$\begin{aligned}
&\langle 0,\widetilde{\text{out}}\,|\,\tilde{a}_n(\text{out})\,\tilde{b}_m(\text{out})\,Sb_q^+(\text{in})\,a_p^+(\text{in})\,|\,0,\text{in}\rangle\, C_V^{-1} =\\
&\quad = \int {}^+\overline{\Psi}_n(x_1)\overleftarrow{\mathscr{D}}_{x_1}{}_-\overline{\Psi}_q(x_2)\overleftarrow{\mathscr{D}}_{x_2}\mathscr{G}_{2,0}(x_1,x_2,y_1,y_2)\vec{\mathscr{D}}_{y_1}{}^-\Psi_m(y_1)\vec{\mathscr{D}}_{y_2}\times \qquad (2.17)\\
&\quad \times{}_+\Psi_p(y_2)\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2 = \int {}^+\overline{\Psi}_n(x_1)\,{}_-\overline{\Psi}_q(x_2)\vec{\mathscr{D}}_{x_1}\vec{\mathscr{D}}_{x_2}\times\\
&\quad \times\mathscr{G}_{2,0}(x_1,x_2,y_1,y_2)\overleftarrow{\mathscr{D}}_{y_1}\overleftarrow{\mathscr{D}}_{y_2}{}^-\Psi_m(y_1)\,{}_+\Psi_p(y_2)\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2.
\end{aligned}\tag{2.18}$$

После выполнения всех операций дифференцирования можно, используя (2.16), в формуле (2.18) сделать замену

$$\overset{+}{\underset{\pm}{\ }}\Psi_n(x) \to \overset{+}{\underset{\pm}{\ }}\psi_n(x).\tag{2.19}$$

РФ в общем случае можно получить, если выразить операторы рождения и уточнения заряженных частиц и фотонов через соответствующие поля [5]:

$$\begin{aligned}
&a_n^+(\text{in}) = -i\int\overline{\psi}(x)\,\vec{\mathscr{D}}_{x+}\Psi_n(x)\,dx,\\
&b_n^+(\text{in}) = -i\int{}_-\overline{\Psi}_n(x)\,\overleftarrow{\mathscr{D}}_x\psi(x)\,dx,\\
&\tilde{a}_n(\text{out}) = i\int{}^+\overline{\Psi}_n(x)\,\overleftarrow{\mathscr{D}}_x\psi(x)\,dx,\\
&\tilde{b}_n(\text{out}) = i\int\overline{\psi}(x)\,\vec{\mathscr{D}}_x{}^-\Psi_n(x)\,dx,\\
&c_{\mathbf{k}\lambda} = i\int{}_-F_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)\,\overleftarrow{\Box}\,A^\mu(x)\,dx,\\
&c_{\mathbf{k}\lambda}^+ = i\int A^\mu(x)\,\Box\,{}_+\mathscr{F}_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)\,dx,\quad(\lambda=1,2)
\end{aligned}\tag{2.20}$$

где функции ${}^+_\pm\Psi_n(x)$ определены формулой (2.15), а

$$\begin{aligned}
&{}_+\mathscr{F}_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) = \int d\mathbf{y}D_0^c(x-y)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0}{}_+f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(y)\,|_{y_0=t_{\text{in}}},\\
&{}_-F_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) = -\int d\mathbf{y}\,D_0^c(x-y)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0}{}_-f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(y)\,|_{y_0=t_{\text{out}}},\\
&\Box\,{}_+\mathscr{F}_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) = \delta(x_0-y_0)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0}{}_+f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x},y_0)\,|_{y_0=t_{\text{in}}},\\
&\Box\,{}_-F_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) = -\delta(x_0-y_0)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0}{}_-f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x},y_0)\,|_{y_0=t_{\text{out}}},\\
&{}_+\mathscr{F}_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) = {}_+f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x),\quad t > t_{\text{in}},\\
&{}_-F_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) = {}_-f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x),\quad t < t_{\text{out}}.
\end{aligned}\tag{2.21}$$

Тогда, если в матричном элементе (2.1) подставить выражения (2.20), то мы приходим к РФ вида

$$C_V^{-1} M_{\text{in}\to\text{out}} = i^{s+j+a+b-r-d} \int {}^{+}\overline{\Psi}_{n_1}(x_1) \overleftarrow{\mathcal{D}}_{x_1} \ldots {}^{+}\overline{\Psi}_{n_s}(x_s) \overleftarrow{\mathcal{D}}_{x_s} {}_{-}\overline{\Psi}_{q_1}(x_{s+1}) \overleftarrow{\mathcal{D}}_{x_{s+1}} \ldots$$
$$\ldots {}_{-}\overline{\Psi}_{q_r}(x_K) \overleftarrow{\Psi}_{x_K} {}_{-}F_{\mu_1 l_1}(z_1) \overleftarrow{\Box}_{z_1} \ldots {}_{-}F_{\mu_a l_a}(z_a) \overleftarrow{\Box}_{z_a} \mathcal{G}^{\mu_1 \ldots \mu_L}_{K,L}(x, y, z) \times \tag{2.22}$$
$$\times \overrightarrow{\Box}_{z_{a+1}} {}_{+}\mathcal{F}_{\mu_{a+1} \varkappa_1}(z_{a+1}) \ldots \overrightarrow{\Box}_{z_L} {}_{+}\mathcal{F}_{\mu_L \varkappa_b}(z_L) \overrightarrow{\mathcal{D}}_{y_1} {}^{-}\Psi_{m_1}(y_1) \ldots$$
$$\ldots \overrightarrow{\mathcal{D}}_{y_j} {}^{-}\Psi_{m_j}(y_j) \overrightarrow{\mathcal{D}}_{y_{j+1}} {}_{+}\Psi_{p_1}(y_{j+1}) \ldots \overrightarrow{\mathcal{D}}_{y_K} {}_{+}\Psi_{p_d}(y_K)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= i^{s+j+a+b-r-d} \int {}^{+}\overline{\Psi}_{n_1}(x_1) \ldots {}_{-}\overline{\Psi}_{q_1}(x_{s+1}) \ldots {}_{-}F_{\mu_1 l_1}(z_1) \ldots \overrightarrow{\mathcal{D}}_{x_1} \ldots \overrightarrow{\Box}_{z_1} \ldots$$
$$\ldots \mathcal{G}^{\mu_1 \ldots \mu_L}_{K,L}(x, y, z) \overleftarrow{\Box}_{z_{a+1}} \ldots \overleftarrow{\mathcal{D}}_{y_1} \ldots {}_{+}\mathcal{F}_{\mu_{a+1}\varkappa_1}(z_{a+1}) \ldots {}^{-}\Psi_{m_1}(y_1) \ldots$$
$$\ldots \Psi_{p_1}(y_{j+1}) \ldots dx\, dy\, dz. \tag{2.23}$$

В выражении (2.23) после выполнения всех операций дифференцирования можно сделать замену (2.19), а также

$${}_{+}\mathcal{F}_{\mu\varkappa}(x) \to {}_{+}f_{\mu\varkappa}(x), \quad {}_{-}F_{\mu\varkappa}(x) \to {}_{-}f_{\mu\varkappa}(x).$$

Следует отметить, что РФ (2.22) и (2.23) справедливы не только в КЭД с внешним полем, нарушающим стабильность вакуума, но и во внешнем поле со стабильным вакуумом, а также без внешнего поля. Интересно отметить, что функции ${}^{\pm}_{\pm}\Psi_n(x)$, ${}_{-}F_{\mu\varkappa}(x)$, ${}_{+}\mathcal{F}_{\mu\varkappa}(x)$ определены не на массовой оболочке (см.: (2.16) и (2.21)), что отличает РФ (2.22) и (2.23) от обычно используемых (см., напр.: [17]).

РФ такого вида можно получить и для произвольной квантовой теории.

Аналогично (2.18) можно переписать и выражения для матричных элементов процессов нулевого порядка:

$$\omega(\overset{+}{n} \mid \overset{+}{p}) = \int dx\, dy\, {}^{+}\overline{\Psi}_n(x) \overrightarrow{\mathcal{D}}_x S^c(x, y) \overleftarrow{\mathcal{D}}_y {}_{+}\Psi_p(y),$$
$$\omega(\overline{m} \mid \overline{q}) = \int dx\, dy\, {}_{-}\overline{\Psi}_q(x) \overrightarrow{\mathcal{D}}_x S^c(x, y) \overleftarrow{\mathcal{D}}_y {}^{-}\Psi_m(y),$$
$$\omega(\overset{+}{n}\overline{m} \mid 0) = -\int dx\, dy\, {}^{+}\overline{\Psi}_n(x) \overrightarrow{\mathcal{D}}_x S^c(x, y) \overleftarrow{\mathcal{D}}_y {}^{-}\Psi_m(y),$$
$$\omega(0 \mid \overline{q}\overset{+}{p}) = -\int dx\, dy\, {}_{-}\overline{\Psi}_q(x) \overrightarrow{\mathcal{D}}_x S^c(x, y) \overleftarrow{\mathcal{D}}_y {}_{+}\Psi_p(y).$$

Введем, следуя [2], производящий функционал Z для точных функций Грина (2.13):

$$Z = \langle 0, \widetilde{\text{out}} \mid S(I, \eta, \overline{\eta}) \mid 0, \text{in}\rangle,$$
$$S(I, \eta, \overline{\eta}) = T \exp\left\{-i \int [(I_\mu(x) + j_\mu(x)) A^\mu(x) + \overline{\eta}(x) \psi(x) + \overline{\psi}(x) \eta(x)]\, dx\right\}, \tag{2.24}$$

где $\overline{\eta}(x)$, $\eta(x)$, $I_\mu(x)$ — источники к полям $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$ и $A^\mu(x)$ соответственно.

Сделаем в функционале (2.24) замену источников:

$$\eta(x) \to \overleftarrow{\mathcal{D}}_x \sum_n (\xi_n^{(+)}(\text{in})\, {}_{+}\Psi_n(x) - \xi_n^{(-)}(\text{out})\, {}^{-}\Psi_n(x)),$$
$$\overline{\eta}(x) \to \sum_n (\xi_n^{(+)}(\text{out})\, {}^{+}\overline{\Psi}_n(x) - \xi_n^{(-)}(\text{in})\, {}_{-}\overline{\Psi}_n(x)) \overrightarrow{\mathcal{D}}_x,$$
$$I_\mu(x) \to -\overleftarrow{\Box}_x \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (\gamma_{\mathbf{k}\lambda}(\text{out})\, {}_{-}F_{\mu \mathbf{k}\lambda}(x) + \gamma_{\mathbf{k}\lambda}(\text{in})\, {}_{+}\mathcal{F}_{\mu \mathbf{k}\lambda}(x)),$$
$$Z[\eta, \overline{\eta}, I] \to Z[\xi, \gamma], \tag{2.25}$$

где $\xi_n^{(\pm)}\binom{\text{in}}{\text{out}}$ — антикоммутирующие, а $\gamma_{\mathbf{k}\lambda}\binom{\text{in}}{\text{out}}$ — коммутирующие величины. Тогда нетрудно убедиться, что матричный элемент (2.1) можно переписать так:

$$M_{\text{in}\to\text{out}} = \left.\frac{\delta Z}{\delta\xi^{(+)}_{n_1}(\text{out})\ldots\delta\xi^{(-)}_{m_1}(\text{out})\ldots\delta\gamma_{l_1}(\text{out})\ldots\ldots\delta\gamma_{\varkappa_1}(\text{in})\ldots\delta\xi^{(-)}_{q_1}(\text{in})\ldots\delta\xi^{(+)}_{p_1}(\text{in})\ldots}\right|_{\xi(\pm)\left(\substack{\text{in}\\ \text{out}}\right)=\gamma\left(\substack{\text{in}\\ \text{out}}\right)=0}, \tag{2.26}$$

что непосредственно приводит к РФ (2.23).

3. Редукционные формулы для средних значений и полных вероятностей радиационных процессов

1. Рассмотрим вопрос о РФ для средних значений и полных вероятностей радиационных процессов в КЭД с внешним полем, нарушающим стабильность вакуума. Надо отметить, что проблема нахождения средних актуальна в КЭД, теории Янга—Миллса и квантовой гравитации в связи с нахождением точных уравнений для квантовых средних — квантовых поправок к уравнениям Максвелла, Янга—Миллса и Эйнштейна. Если вакуум стабилен, то задача нахождения средних не выходит за рамки задачи точных функций Грина (2.13). В рассматриваемом же случае нестабильного вакуума техника нахождения средних усложняется и требует введения новых функций Грина, как это было отмечено в статистической физике [18], в КЭД с внешним электромагнитным полем [2] и внешним гравитационным полем [19].

Введем, следуя [2], точные функции Грина, связанные со средними значениями гейзенберговских операторов по in-состояниям:

$$\begin{gathered}\mathscr{G}^{\mu_1\ldots\mu_a,\,\nu_1\ldots\nu_{a'}}_{nma,\,n'm'a'}(x,y,z\,|\,x',y',z') = \langle 0,\text{in}\,|\,\breve{\psi}(x_1)\ldots\breve{\psi}(x_n)\breve{\bar{\psi}}(y_1)\ldots\breve{\bar{\psi}}(y_m)\times\\ \times\breve{A}^{\mu_1}(z_1)\ldots\breve{A}^{\mu_a}(z_a)\,T\breve{\psi}(x_1')\ldots\breve{\psi}(x_{n'}')\breve{\bar{\psi}}(y_1')\ldots\breve{\bar{\psi}}(y_{m'}')\breve{A}^{\nu_1}(z_1')\ldots\\ \ldots\breve{A}^{\nu_{a'}}(z_{a'}')\,|\,0,\text{in}\rangle = \langle 0,\text{in}\,|\,S^{-1}\psi(x_1)\ldots\bar{\psi}(y_1)\ldots A^{\mu_1}(z_1)\ldots\\ \ldots T\psi(x_1')\ldots\bar{\psi}(y_1')\ldots A^{\nu_1}(z_1')\ldots S\,|\,0,\text{in}\rangle.\end{gathered} \tag{3.1}$$

В выражении (3.1) знак T-произведения действует в обе стороны: вправо — упорядочивает, влево — антиупорядочивает операторы. Вычислим, например, среднее значение электромагнитного поля в in-состоянии с двумя заряженными частицами и одним фотоном:

$$|\,\text{in}\rangle = c^{+}_{\mathbf{k}\lambda}b^{+}_{m}\,(\text{in})\,a^{+}_{n}\,(\text{in})|\,0,\text{in}\rangle, \tag{3.2}$$

$$\langle A_\mu\rangle = \langle\text{in}\,|\,S^{-1}A_\mu\,(x)\,S\,|\,\text{in}\rangle. \tag{3.3}$$

Подставим в (3.2) операторы рождения и уничтожения, выраженные через соответствующие поля. Тогда среднее значение $\langle A_\mu(x)\rangle$ записывается в виде

$$\begin{gathered}\langle A_\mu(x)\rangle = \lim_{\substack{x_1^0<y_1^0\to t_{\text{in}}\\ y_2^0<x_2^0\to t_{\text{in}}\\ z_1^0,\,z_2^0\to t_{\text{in}}}}\int {}_{+}\overset{+}{\varphi}_n(x_1)\,{}_{-}\overset{+}{\varphi}_m(x_2)\,{}_{+}\overset{*}{f}_{\mu_1\mathbf{k}\lambda}(z_1)\,i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial z_1^0}\times\\ \times\mathscr{G}^{\mu_1\mu\nu}_{111,\,112}(x_1,y_1,z_1\,|\,x_2,y_2,x,z_2)\,i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial z_2^0}\,{}_{+}f_{\nu\mathbf{k}\lambda}(z_2)\,\gamma^0{}_{-}\varphi_m(y_1)\,\gamma^0{}_{+}\varphi_n(y_2)\\ \times dx_1\,dx_2 dy_1\,dy_2\,dz_1\,dz_2.\end{gathered}$$

Среднее значение типа (3.4) можно переписать и в ковариантном виде (РФ) аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Однако этот ответ мы приведем несколько позже.

2. Как показано в работах [2—5], в КЭД с внешним полем, нарушающим стабильность вакуума, нетривиальным является и обобщение соотно-

шений типа оптической теоремы для полных вероятностей радиационных процессов. Дело заключается в том, что в связи с возможностью рождения пар появляются дополнительные каналы для распада любого начального состояния. Поэтому выражение для полной вероятности заданного процесса должно включать суммирование по всему бесконечному множеству этих новых каналов. Тем не менее оказывается, что и в этом случае введением специально подобранного пропагатора частиц во внешнем поле удается свести дело к конечному числу фейнмановских диаграмм с определенными внешними концами и, более того, результат представить в виде «рассечения» этих диаграмм. Все эти результаты получены на основе соотношения унитарности матрицы рассеяния:

$$S^+S = SS^+ = 1. \tag{3.5}$$

Рассмотрим кратко следствие из этого условия. Усредним соотношение (3.5) по произвольному in-состоянию. Тогда получим тождество

$$\sum_{\text{out}} |\langle\widetilde{\text{out}}\,|\,S\,|\,\text{in}\rangle|^2 = \langle\text{in}\,|\,\text{in}\rangle, \tag{3.6}$$

где суммирование проводится по полной системе $\widetilde{\text{out}}$-состояний. Рассмотрим, например, полную вероятность излучения из произвольного in-состояния. Обозначим ее через $\mathcal{P}$ (in). Предположим, что in-состояние содержит M фотонов и некоторое число заряженных частиц. Очевидно, что $\mathcal{P}$ (in) можно записать в виде

$$\mathcal{P}(\text{in}) = \sum_{\text{out}}{}' |\langle\widetilde{\text{out}}\,|\,S\,|\,\text{in}\rangle|^2, \tag{3.7}$$

где суммирование проводится по конечным $\widetilde{\text{out}}$-состояниям, содержащим не менее чем $M+1$ фотон. Используя тождество (3.6), вероятность $\mathcal{P}$ (in) можно переписать в виде

$$\mathcal{P}(\text{in}) = \langle\text{in}\,|(1 - S^+\mathcal{P}_M S)|\,\text{in}\rangle, \tag{3.8}$$

где

$$\mathcal{P}_M = \sum_{L=0}^{M} P_L,$$
$$P_L = (L!)^{-1}\sum_{\{k,\lambda\}} c^+_{k_1\lambda_1}\cdots c^+_{k_L\lambda_L}|0\rangle^{\gamma\gamma}\langle 0|c_{k_L\lambda_L}\cdots c_{k_1\lambda_1}, \tag{3.9}$$

а $|0\rangle^\gamma$ — вакуумный вектор в фоковском пространстве состояний свободного электромагнитного поля. При выводе соотношения (3.8) мы воспользовались условием полноты векторов состояний в фоковском пространстве заряженных частиц. Отметим, что в (3.9), так же, как и при вычислении средних значений, удалось выразить полную вероятность излучения $\mathcal{P}$ (in) в виде среднего по начальному in-состоянию. Если начальное состояние не содержит фотоны ($\forall\mathbf{k}, \lambda$: $c_{\mathbf{k}\lambda}\,|\,\text{in}\rangle = 0$), то из (3.8) получим результат работ [4—6]:

$$\mathcal{P}(\text{in}) = \langle\text{in}\,|(1 - E^+E)|\,\text{in}\rangle, \quad E = {}^\gamma\langle 0\,|\,S\,|\,0\rangle^\gamma,$$
$$E^+ = {}^\gamma\langle 0\,|\,S^+\,|\,0\rangle^\gamma. \tag{3.10}$$

3. Для получения РФ как для средних значений, так и для полных вероятностей радиационных процессов типа (3.8) введем функционал

$$Z = \langle 0, \text{in}\,|\,S^+(I_2, \eta_2, \overline{\eta}_2)\,P_0(\alpha)\,S(I_1, \eta_1, \overline{\eta}_1)|\,0, \text{in}\rangle, \tag{3.11}$$

где

$$P_0(\alpha) = N\exp\Big\{-\sum_{\mathbf{k},\lambda}\alpha_{\mathbf{k}\lambda}n_{\mathbf{k}\lambda}\Big\}, \quad n_{\mathbf{k}\lambda} = c^+_{\mathbf{k}\lambda}c_{\mathbf{k}\lambda},$$

$$S^+(I_2, \eta_2, \overline{\eta}_2) = \exp\Big\{i\int[(I_2^\mu(x) + j^\mu(x))A_\mu(x) + \overline{\psi}(x)\eta_2(x) +$$
$$+ \overline{\eta}_2(x)\psi(x)]\,dx\Big\}\,T,$$

Оператор $S(I, \eta, \bar{\eta})$ определен формулой (2.24), а $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}$ — коммутирующие величины. Отметим, что [20]

$$P_0(1) = |0\rangle^{\gamma}\cdot{}^{\gamma}\langle 0|, \quad P_0(0) = 1.$$

Поэтому функционал (3.10) при $\alpha_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ совпадает с производящим функционалом для средних значений, введенным в работе [2], и, как мы увидим ниже, при $\alpha_{\mathbf{k}\lambda} = 1$ позволяет определять полные вероятности радиационных процессов. Определим функции Грина как функциональные производные от функционала $\mathbf{Z}$ по всем источникам:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{G}^{\mu_1\ldots\mu_l,\,\nu_1\ldots\nu_{l'}}_{nml;\,n'm'l'|\{\mathbf{k},\lambda\},\,L}(x, y, z; x', y', z') = (-i)^{n+l+m'}i^{n'+l'+m}\times\\
&\times\frac{(-1)^L\,\delta^{n+m+l+n'+m'+l'+L}\mathbf{Z}}{\delta\bar{\eta}_2(x_1)\ldots\delta\bar{\eta}_2(x_n)\,\delta\eta_2(y_1)\ldots\delta\eta_2(y_m)\,\delta I_2^{\mu_1}(z_1)\ldots\delta I_2^{\mu_l}(z_l)}\times\\
&\times\frac{1}{\delta\bar{\eta}_1(x_1')\ldots\delta\bar{\eta}_1(x_{n'}')\,\delta\eta_1(y_1')\ldots\delta\eta_1(y_{m'}')\,\delta I_1^{\nu_1}(z_1')\ldots\delta I_1^{\nu_{l'}}(z_{l'}')}\times\\
&\times\frac{1}{\delta\alpha_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\ldots\delta\alpha_{\mathbf{k}_L\lambda_L}}\Bigg|_{\substack{I_\sigma=\eta_\sigma=\bar{\eta}_\sigma=0\ (\sigma=1,2)\\ \alpha_{\mathbf{k}\lambda}=1}} = \langle 0, \mathrm{in}|\breve{\psi}(x_1)\ldots\breve{\bar{\psi}}(y_1)\ldots\\
&\ldots\breve{A}^{\mu_1}(z_1)\overleftarrow{T}S^+P_{L,\{\mathbf{k},\lambda\}}S\overrightarrow{T}\breve{\psi}(x_1')\ldots\breve{\bar{\psi}}(y_1')\ldots\breve{A}^{\nu_1}(z_1')\ldots|0, \mathrm{in}\rangle,
\end{aligned}\tag{3.12}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{L,\{\mathbf{k},\lambda\}} &= c^+_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\ldots c^+_{\mathbf{k}_L\lambda_L}|0\rangle^{\gamma}\cdot{}^{\gamma}\langle 0|c_{\mathbf{k}_L\lambda_L}\ldots c_{\mathbf{k}_1\lambda_1} =\\
&= N\Big[n_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\ldots n_{\mathbf{k}_L\lambda_L}\exp\Big(-\sum_{\mathbf{k}',\lambda'} n_{\mathbf{k}'\lambda'}\Big)\Big],
\end{aligned}$$

а стрелка над оператором T-упорядочения означает направление его действия.

Функции Грина (3.12) позволяют вычислить полные вероятности радиационных процессов, например:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(\mathbf{k}, \lambda) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}}\delta_{\lambda\lambda} - \sum_{L=0}^{1}\sum_{\{\mathbf{k}',\lambda'\}}\int {}_+f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_0}\times\\
\times\mathscr{G}^{\mu\nu}_{001,\,001|\{\mathbf{k}'\lambda'\},\,L}(x, y)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0}{}_+f_{\nu\mathbf{k}\lambda}(y)\big|_{x_0=y_0=t_{\mathrm{in}}}.
\end{aligned}\tag{3.13}$$

Функционал $\mathbf{Z}$ нетрудно представить в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} &= \exp\left\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{\delta\mathbf{I}}\right\}\mathbf{Z}_0,\\
\mathbf{Z}_0 &= \exp\left\{i\bar{\eta}\tilde{\tilde{\mathrm{S}}}_0\eta - \frac{i}{2}\mathbf{I}\mathbf{D}_0(|\alpha)\mathbf{I}\right\}.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

Здесь использованы матричные конденсированные обозначения, аналогичные [2], где суммирование по повторяющимся индексам подразумевает и интегрирование по координатам

$$\eta = \eta_\alpha(x),\quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_\beta(x),\quad \mathbf{I} = I^\mu_\rho(x),\quad \alpha, \beta, \rho = 1, 2,$$

$$\gamma = \gamma^\mu_{\alpha\beta\rho}(x, y, z) = \gamma^\mu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\rho}\delta(x-y)\,\delta(y-z),$$

$$\tilde{\tilde{\mathrm{S}}}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{S}}^c(x, y) & \tilde{\tilde{S}}^{(+)}(x, y)\\ -\tilde{\tilde{S}}^{(-)}(x, y) & \tilde{\tilde{S}}^{\bar{c}}(x, y)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_0(|\alpha) = \begin{pmatrix} D^c_{0\mu\nu}(x-y) & D^{(+)}_{\mu\nu}(x-y|\alpha)\\ -D^{(-)}_{\mu\nu}(x-y|\alpha) & D^{\bar{c}}_{0\mu\nu}(x-y)\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{S}}^c(x, y) = i\langle 0, \mathrm{in}|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0, \mathrm{in}\rangle,$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S}^{\bar c}(x, y) = i\langle 0, \text{in}\,|\,\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\,T\,|\,0, \text{in}\rangle,\\
&\widetilde{S}^{(+)}(x, y) = i\langle 0, \text{in}\,|\,\overline{\psi}(y)\,\psi(x)|\,0, \text{in}\rangle,\\
&\widetilde{S}^{(-)}(x, y) = i\langle 0, \text{in}\,|\,\psi(x)\,\overline{\psi}(y)|\,0, \text{in}\rangle,\\
&D^{\bar c}_{0\mu\nu}(x-y) = -i\langle 0, \text{in}\,|\,A_\mu(x)\,A_\nu(y)\,T\,|\,0, \text{in}\rangle,\\
&D^{(\pm)}_{\mu\nu}(x-y\,|\,\alpha) = \mp i\sum_{\mathbf{k},\lambda}\frac{e_\mu(\mathbf{k},\lambda)\,e_\nu(\mathbf{k},\lambda)\,e^{\pm k(x-y)}}{2V\omega_{\mathbf{k}}}(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}-1).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Выражение (3.14) при $\alpha_{\mathbf{k}\lambda} = 1$ совпадает с результатом работы [4]. Введем функции

$$\begin{aligned}
&{}_+\Phi_n(x) = -i\int \tilde{\widetilde{S}}^{c}(x, y, t_{\text{in}})\,\gamma^0{}_+\varphi_n(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\\
&{}_-\Phi_n(x) = i\int \tilde{\widetilde{S}}^{\bar c}(x, \mathbf{y}, t_{\text{in}})\,\gamma^0{}_-\varphi_n(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\\
&\overrightarrow{\mathscr{D}}_{x\pm}\Phi_n(x) = i\gamma^0{}_\pm\varphi_n(\mathbf{x})\,\delta(x_0 - t_{\text{in}}),\\
&{}_\pm\Phi_n(x) = {}_\pm\varphi_n(x), \quad t > t_{\text{in}},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

через которые можно выразить in-операторы рождения и уничтожения заряженных частиц:

$$\begin{pmatrix} a_n(\text{in}) \\ b_n^+(\text{in}) \end{pmatrix} = -i\int dx \begin{pmatrix} {}_+\overline{\Phi}_n(x) \\ {}_-\overline{\Phi}_n(x) \end{pmatrix} \overleftarrow{\mathscr{D}}_x\psi(x),$$

$$\begin{pmatrix} a_n^+(\text{in}) \\ b_n(\text{in}) \end{pmatrix} = -i\int dx\,\overline{\psi}(x)\,\overrightarrow{\mathscr{D}}_x \begin{pmatrix} {}_+\Phi_n(x) \\ {}_-\Phi_n(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда, например, для полной вероятности $\mathscr{P}(\overset{+}{p})$ излучения из одноэлектронного состояния можно записать

$$\mathscr{P}(\overset{+}{p}) = \delta_{pp} + \int dx\,dy\,{}_+\overline{\Phi}_p(x)\,\overleftarrow{\mathscr{D}}_x\mathscr{G}_{100,\,010|0}(x; y)\,\overrightarrow{\mathscr{D}}_{y+}\Phi_p(y).$$

Отметим, что в этом выражении переносить действие операторов $\mathscr{D}$ на функцию Грина $\mathscr{G}_{100,010|0}(x; y)$ нельзя. Это связано с тем, что ряд теории возмущений для функции $\mathscr{G}_{100,010|0}(x; y)$ содержит (справа или слева) частотную функцию $\widetilde{S}^{(-)}(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Дирака. Чтобы написать РФ, в которых действие дифференциальных операторов перенесено на функции Грина, рассмотрим вспомогательный функционал

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{Z}}(\xi, \chi, z, \alpha) = \langle 0, \text{in}\,|\,U_2(\xi, z^{(-)})\,S^+(I_2, \eta_2, \overline{\eta}_2)\,\times\\
&\qquad\times P_0(\alpha)\,S(I_1, \eta_1, \overline{\eta}_1)\,U_1(\zeta, z^{(+)})|\,0, \text{in}\rangle,\\
&U_1(\zeta, z^{(+)}) = \exp\Big\{\sum_{\mathbf{k},\lambda} z^{(+)}_{\mathbf{k}\lambda}c^+_{\mathbf{k}\lambda} + \sum_n[\zeta_n^{(+)}a_n^+(\text{in}) + \zeta_n^{(-)}b_n^+(\text{in})]\Big\},\\
&U_2(\xi, z^{(-)}) = \exp\Big\{\sum_{\mathbf{k},\lambda} z^{(-)}_{\mathbf{k}\lambda}c_{\mathbf{k}\lambda} + \sum_n[\xi_n^{(+)}a_n(\text{in}) + \xi_n^{(-)}b_n(\text{in})]\Big\},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\zeta_n^{(\pm)}$, $\xi_n^{(\pm)}$ — антикоммутирующие, а $z^{(\pm)}_{\mathbf{k}\lambda}$ — коммутирующие величины. Функционал (3.17) при $\alpha_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ является производящим функционалом для средних значений по произвольному in-состоянию, а при $\alpha_{\mathbf{k}\lambda} = 1$ — производящим функционалом для полных вероятностей радиационных процессов.

Нетрудно показать, что функционал (3.17) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{Z}}(\xi, \zeta, z, \alpha) = \exp\left\{e\frac{\delta}{\delta\eta_i}\gamma\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\frac{\delta}{\delta\mathbf{I}}\right\}\exp\{i(\overline{\eta} + \overline{\mathbf{R}})\,\tilde{\widetilde{\mathbf{S}}}_0(\eta + \mathbf{Q}) -\\
&\qquad -\frac{i}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda})\,\mathbf{D}_0(\,|\alpha)(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda})\},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}(x) = \overleftarrow{\mathscr{D}}_x \sigma_3 \sum_n \{\zeta_n^{(+)}\,{}_+\chi_n(x) - \xi_n^{(-)}\,{}_-\chi_n(x)\};\\
&\overline{\mathbf{R}}(x) = \sum_n \{\xi_n^{(+)}\,{}_+\overline{\chi}_n(x) - \zeta_n^{(-)}\,{}_-\overline{\chi}_n(x)\}\, i\sigma_2 \overrightarrow{\mathscr{D}}_x;\\
&\mathbf{\Lambda}(x) = -\overleftarrow{\Box}\sigma_3 \sum_{\mathbf{k}\lambda} \{z_{\mathbf{k}\lambda}^{(+)}\,{}_+\theta_{\mathbf{k}\lambda}(x) + z_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)}\,{}_-\theta_{\mathbf{k}\lambda}(x) - \alpha_{\mathbf{k}\lambda}\theta_{\mathbf{k}\lambda}^{z}(x)\};\\
&{}_+\chi_n(x) = \begin{pmatrix} {}_+\Phi_n(x) \\ -\,{}_+\varphi_n(x)\end{pmatrix}; \quad {}_-\chi_n(x) = \begin{pmatrix} {}_-\varphi_n(x) \\ -\,{}_-\Phi_n(x)\end{pmatrix};\\
&{}_+\theta_{\mathbf{k}\lambda}(x) = \begin{pmatrix} {}_+\mathscr{F}_{\mu\mathbf{k}}(x) \\ -\,{}_+f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)\end{pmatrix}; \quad {}_-\theta_{\mathbf{k}\lambda}(x) = \begin{pmatrix} {}_-f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x) \\ -\,{}_+\overset{*}{\mathscr{F}}_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)\end{pmatrix};\\
&\theta_{\mathbf{k}\lambda}^{z}(x) = \begin{pmatrix} {}_-f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)\, z_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)} \\ -\,{}_+f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)\, z_{\mathbf{k}\lambda}^{(+)}\end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}; \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

что позволяет установить связь между функционалами (3.17) и (3.14):

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\xi, \zeta, z, \alpha) = \mathbf{Z}(\eta + \mathbf{Q}, \overline{\eta} + \overline{\mathbf{R}}, \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}). \tag{3.20}$$

Это соотношение позволяет, например, для полной вероятности $\mathscr{P}(\overset{+}{p})$ излучения окончательно записать РФ в виде

$$\mathscr{P}(\overset{+}{p}) = \delta_{pp} - \int dx\, dy\, {}_+\overline{\chi}_p(x)\, i\sigma_2 \overrightarrow{\mathscr{D}}_x \left.\frac{\delta^2 \mathbf{Z}}{\delta\overline{\eta}(x)\,\delta\eta(y)}\right|_{\substack{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=0\\ \alpha=1}} \overrightarrow{\mathscr{D}}_y \sigma_3\, {}_+\chi_p(y), \tag{3.21}$$

где матричная функция Грина

$$\left.\frac{\delta^2 \mathbf{Z}}{\delta\overline{\eta}(x)\,\delta\eta(y)}\right|_{\substack{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=0\\ \alpha=1}}$$

определена формулой (3.12) и в данном случае совпадает с функцией Грина (3.1). После выполнения всех дифференцирований в выражении (3.21) можно сделать замену ${}_+\Phi_p \to {}_+\varphi_p$. Аналогичные результаты можно получить и для любой полной вероятности радиационного процесса.

Как отмечалось ранее полагая в (3.20) $\alpha_{\mathbf{k}\lambda} = 0$, мы можем получить РФ и для средних значений. Например, для среднего значения электромагнитного поля по начальному состоянию (3.2) получим

$$\begin{aligned}
\langle A_\mu(x)\rangle &= \left.\frac{i\delta^7 \mathbf{Z}}{\delta\xi_n^{(+)}\delta\xi_m^{(-)}\delta\zeta_m^{(-)}\delta\zeta_n^{(+)}\delta I_1^\mu(x)\,\delta z_{\mathbf{k}\lambda}^{(+)}\delta z_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)}}\right|_{\substack{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=\xi=\zeta=z=\\ =\alpha=0}} =\\
&= \int dx_1 \ldots dx_6\, {}_+\overline{\chi}_n(x_1)\, {}_-\overline{\chi}_m(x_2)\, {}_+\theta_{\mathbf{k}\lambda}(x_3)\, i\sigma_2 \overrightarrow{\mathscr{D}}_{x_1} i\sigma_2 \times\\
&\times \overrightarrow{\mathscr{D}}_{x_2}\sigma_3 \overrightarrow{\Box}_{x_3} \left.\frac{\delta^7 \mathbf{Z}}{\delta\overline{\eta}(x_1)\,\delta\overline{\eta}(x_2)\,\delta\mathbf{I}(x_3)\,\delta I_1^\mu(x)\,\delta\eta(x_4)\,\delta\eta(x_5)\,\delta\mathbf{I}(x_6)}\right|_{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=\alpha=0} \times\\
&\times \overleftarrow{\mathscr{D}}_{x_4}\sigma_3 \overleftarrow{\mathscr{D}}_{x_5}\sigma_3 \overleftarrow{\Box}_{x_6}\sigma_3\, {}_-\chi_m(x_4)\, {}_+\chi_n(x_5)\, {}_-\theta_{\mathbf{k}\lambda}(x_6).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

После выполнения всех дифференцирований в (3.22) можно сделать замену

$${}_\pm\Phi_n \to {}_\pm\varphi_n, \quad {}_+\mathscr{F}_{\mu\mathbf{k}\lambda} \to {}_+f_{\mu\mathbf{k}\lambda}.$$

4. Матрицы плотности частиц, рожденных во внешнем поле

Найдем матрицы плотности частиц, рожденных внешним полем из вакуума с учетом всех радиационных поправок. Обозначим через $f_+ = f_+(a\,(\text{out}), a^+(\text{out}))$, $f_- = f_-(b\,(\text{out}), b^+(\text{out}))$ операторы некоторых наблюдаемых, описывающих состояния только частиц (+) или только античастиц (—) в конечный момент времени $t = t_{\text{out}}$. Среднее значение физических величин $f_\pm$ в конечный момент времени по состоянию, являющемуся вакуумным в начальный момент времени $t = t_{\text{in}}$, равно

$$\langle f_\pm \rangle = \langle 0, \text{in} \mid U^{-1} f_\pm U \mid 0, \text{in} \rangle, \quad U = U(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}), \tag{4.1}$$

здесь $U(t_{\text{out}}, t_{\text{in}})$ — полный оператор эволюции системы. Как показано в [1, 2, 5], оператор U можно записать в виде

$$U = U_0 S, \quad U_0 = U_0(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}), \quad S = S(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}),$$

где U_0 — оператор эволюции спинорного поля во внешнем электромагнитном поле, S — матрица рассеяния. Тогда

$$\langle f_\pm \rangle = \langle 0, \text{in} \mid S^{-1} U_0^{-1} f_\pm U_0 S \mid 0, \text{in} \rangle. \tag{4.2}$$

Для наших целей в формуле (4.2) удобно перейти к усреднению по out-состояниям. Для этого, воспользовавшись условием полноты векторов состояний в $t = t_{\text{out}}$:

$$\sum_{L, M, N=0}^{\infty} (L!\, M!\, N!)^{-1} \sum_{\substack{\{m\};\, \{n\} \\ \{\mathbf{k};\, \lambda=1,\, 2\}}} c^+_{\mathbf{k}_L \lambda_L} \ldots c^+_{\mathbf{k}_1 \lambda_1} b^+_{n_N}(\text{out}) \ldots b^+_{n_1}(\text{out})\, a^+_{m_1}(\text{out}) \ldots$$
$$\ldots a^+_{m_M}(\text{out}) \mid 0, \text{out} \rangle \langle 0, \text{out} \mid a_{m_M}(\text{out}) \ldots a_{m_1}(\text{out})\, b_{n_1}(\text{out}) \ldots \tag{4.3}$$
$$\ldots b_{n_N}(\text{out})\, c_{\mathbf{k}_1 \lambda_1} \ldots c_{\mathbf{k}_L \lambda_L} = 1,$$

разложим вектор $U \mid 0, \text{in} \rangle$ по out-состояниям:

$$U \mid 0, \text{in} \rangle = \sum_{L, M, N=0}^{\infty} (L!\, M!\, N!)^{-1} \sum_{\substack{\{m\}\, \{n\} \\ \{\mathbf{k};\, \lambda=1,\, 2\}}} c^+_{\mathbf{k}_L \lambda_L} \ldots c^+_{\mathbf{k}_1 \lambda_1} b^+_{n_N}(\text{out}) \ldots$$
$$\ldots b^+_{n_1}(\text{out})\, a^+_{m_1}(\text{out}) \ldots a^+_{m_M}(\text{out}) \mid 0, \text{out} \rangle M_{0 \to \text{out}}, \tag{4.4}$$

где

$$M_{0 \to \text{out}} = \langle 0, \widetilde{\text{out}} \mid \tilde{a}_{m_M}(\text{out}) \ldots \tilde{a}_{m_1}(\text{out})\, \tilde{b}_{n_1}(\text{out}) \ldots \tilde{b}_{n_N}(\text{out})\, c_{\mathbf{k}_1 \lambda_1} \ldots$$
$$\ldots c_{\mathbf{k}_L \lambda_L} S \mid 0, \text{in} \rangle \tag{4.5}$$

— матричный элемент процесса перехода из вакуумного состояния в состояние, содержащее L фотонов, M электронов и N позитронов [1, 2, 5]. В (4.5) использованы обозначения (2.2).

Матричный элемент (4.5) можно вычислить, используя технику приведения S-матрицы к обобщенной нормальной форме относительно вакуумов $\langle 0, \text{out} \mid$ и $\mid 0, \text{in} \rangle$ [1, 2, 5]. Для этого перепишем S-матрицу в обобщенной нормальной форме:

$$S = \exp\left\{ e \frac{\delta}{\delta \eta} \gamma \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta I} \right\} \exp\left[i \left(\bar{\eta} S^c \eta - \frac{1}{2} I D_0^c I \right) \right] \times$$
$$\times \tilde{N} \exp\left[-i(\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + AI) \right] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=I=0}, \tag{4.6}$$
$$\langle 0, \widetilde{\text{out}} \mid \tilde{N}(\ldots) \mid 0, \text{in} \rangle = 0,$$

где пропагаторы $S^c(x, y)$, $D^c_{0\mu\nu}(x - y)$ и величина c_v определены формулой (2.4).

Для дальнейшего выражение (4.6) удобно преобразовать, используя разложения полевых операторов по операторам рождения и уничтожения [1, 2, 5]:

$$\psi(x) = \sum_n [{}_+\psi_n(x)\, a_n(\text{in}) + {}^-\psi_n(x)\, \tilde{b}^+_n(\text{out})],$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n [{}_+\bar{\psi}_n(x)\, \tilde{a}^+_n(\text{out} + {}_-\bar{\psi}_n(x)\, b_n(\text{in})],$$

$$A_\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} [{}_+f_{\mu \mathbf{k} \lambda}(x)\, c_{\mathbf{k}\lambda} + {}_-f_{\mu \mathbf{k}\lambda}(x)\, c^+_{\mathbf{k}\lambda}],$$

где функции ${}_{\pm}\psi_n(x)$, ${}^{\pm}\psi_n(x)$, ${}_{\pm}f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)$ введены в (2.7)—(2.11).

Тогда матричный элемент (4.5) можно переписать в виде

$$M_{0\to\mathrm{out}} = \exp\left\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\frac{\delta}{\delta I}\right\}\exp\left[i\left(\bar\eta S^c\eta - \frac{1}{2}ID_0^cI\right)\right]\times$$
$$\times\langle 0,\widetilde{\mathrm{out}}\,|\prod_{j=M}^{1}(\tilde a_{m_j}(\mathrm{out}) - i\,{}^+\eta_{m_j})\prod_{q=1}^{N}(\tilde b_{n_q}(\mathrm{out}) + i\,{}^-\bar\eta_{n_q})\,|\,0,\mathrm{in}\rangle\times$$
$$\times\prod_{l=1}^{L}(-i\,{}^-I^{\mathbf{k}_l\lambda_l})\Big|_{\bar\eta=\eta=I=0}, \tag{4.7}$$

где

$${}^+\eta_m = \int dx\,{}^+\bar\psi_m(x)\,\eta(x),\quad {}^-\bar\eta_n = \int dx\,\bar\eta(x)\,{}^-\psi_n(x),$$
$${}^-I^{\mathbf{k}\lambda} = \int dx I^\mu(x)\,{}_-f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x).$$

Подставляя матричный элемент (4.7) в разложение вектора $U\,|\,0,\mathrm{in}\rangle$ (4.4) и суммируя по числам фотонов L, получаем

$$U\,|\,0,\mathrm{in}\rangle = \exp\left\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\frac{\delta}{\delta I}\right\}\exp\left[i\left(\bar\eta S^c\eta - \frac{1}{2}ID_0^cI\right)\right]\times$$
$$\times\exp\Big(-\sum_{\mathbf{k},\lambda}i\,{}^-I^{\mathbf{k}\lambda}c^+_{\mathbf{k}\lambda}\Big)\sum_{M,N=0}^{\infty}(M!\,N!)^{-1}\sum_{\{m\}\{n\}}b^+_n(\mathrm{out})\ldots b^+_{n_1}(\mathrm{out})\times$$
$$\times a^+_{m_1}(\mathrm{out})\ldots a^+_{m_M}(\mathrm{out})\,|\,0,\mathrm{out}\rangle\langle 0,\widetilde{\mathrm{out}}\,|\prod_{j=M}^{1}(\tilde a_{m_j}(\mathrm{out}) - i\,{}^+\eta_{m_j})\times \tag{4.8}$$
$$\times\prod_{q=1}^{N}(\tilde b_{n_q}(\mathrm{out}) + i\,{}^-\bar\eta_{n_q})\,|\,0,\mathrm{in}\rangle\Big|_{\bar\eta=\eta=I=0}.$$

Используя правила вычисления элементов $\langle 0,\widetilde{\mathrm{out}}\,|\,\tilde a_m(\mathrm{out})\ldots$ $\ldots\tilde b_n(\mathrm{out})\ldots|\,0,\mathrm{in}\rangle$ [1, 2, 5], выражение (4.8) можно привести к виду

$$U\,|\,0,\mathrm{in}\rangle = \exp\left\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\frac{\delta}{\delta I}\right\}\exp\left[i\left(\bar\eta S^c\eta - \frac{1}{2}ID_0^cI\right)\right]\times$$
$$\times\exp\Big(-\sum_{\mathbf{k},\lambda}i\,{}^-I^{\mathbf{k}\lambda}c^+_{\mathbf{k}\lambda}\Big)\sum_{M=0}^{\infty}(M!)^{-1}\sum_{\{m\}\{n\}}c_v\prod_{j=1}^{M}\omega(\overset{+}{m}_j\bar n_j\,|\,0)\,b^+_{n_M}(\mathrm{out})\ldots$$
$$\ldots b^+_{n_1}(\mathrm{out})\exp\Big[\sum_q b^+_q(\mathrm{out})\,i\,{}^-\bar\eta_q\Big]\exp\Big[-\sum_p a^+_p(\mathrm{out})\,i\,{}^+\eta_p\Big]\times$$
$$\times a^+_{m_1}(\mathrm{out})\ldots a^+_{m_M}(\mathrm{out})\,|\,0,\mathrm{out}\rangle\Big|_{\bar\eta=\eta=I=0}. \tag{4.9}$$

Подставляя (4.9) в (4.2) и избавляясь в одном случае от операторов b (out), b^+ (out), а в другом — от операторов a (out), a^+ (out) продвижением их через f_+ или f_- в одну сторону, найдем

$$\langle f_+\rangle = p_v\exp\left\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\frac{\delta}{\delta\mathbf{I}}\right\}\exp\left[i\left(\bar\eta S_{(+)}\eta - \frac{1}{2}\mathbf{I}D_0\mathbf{I}\right)\right]\times$$
$$\times\sum_{M=0}^{\infty}(M!)^{-1}\sum_{\{m\}\{n\}}\langle 0,\mathrm{out}\,|\,a_{n_M}(\mathrm{out})\ldots a_{n_1}(\mathrm{out})\exp\Big\{\sum_k\Big[i\,{}^+\bar\eta_{2k} -$$
$$-\sum_l i\,{}^-\bar\eta_{1l}\overset{*}{\omega}(\overset{*}{k}\bar l\,|\,0)\Big]a_k(\mathrm{out})\Big\}f_+\exp\Big\{\sum_p a^+_p(\mathrm{out})\Big[-i\,{}^+\eta_{1p} +$$
$$+\sum_r\omega(\overset{+}{p}\bar r\,|\,0)\,i\,{}^-\eta_{2r}\Big]\Big\}a^+_{m_1}(\mathrm{out})\ldots a^+_{m_M}(\mathrm{out})\,|\,0,\mathrm{out}\rangle\times$$

$$\times \prod_{j=1}^{M} Z^{(+)}_{m_j n_j} \Big|_{\bar{\eta}=\eta=\mathrm{I}=0}, \tag{4.10}$$

$$\langle f_- \rangle = p_v \exp\left\{ e \frac{\delta}{\delta \eta} \gamma \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta \mathrm{I}} \right\} \exp\left[i \left(\bar{\eta} \mathrm{S}_{(-)} \eta - \frac{1}{2} \mathrm{I} \mathrm{D}_0 \mathrm{I} \right) \right] \times$$

$$\times \sum_{M=0}^{\infty} (M!)^{-1} \sum_{\{m\}\{n\}} \langle 0, \mathrm{out} \,|\, b_{n_M}(\mathrm{out}) \ldots b_{n_1}(\mathrm{out}) \exp\left\{ \sum_k \left[- i^- \eta_{2k} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_l i^+ \eta_{1l} \overset{*}{\omega} (\overset{+}{l} \bar{k} \,|\, 0) \right] b_k(\mathrm{out}) \right\} f_- \exp\left\{ \sum_p b_p^+(\mathrm{out}) \left[i^- \bar{\eta}_{1p} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_r \omega (\overset{+}{r} \bar{p} \,|\, 0) \, i^+ \bar{\eta}_{2r} \right] \right\} b^+_{m_1}(\mathrm{out}) \ldots b^+_{m_M}(\mathrm{out}) \,|\, 0, \mathrm{out} \rangle \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{M} Z^{(-)}_{m_j n_j} \Big|_{\bar{\eta}=\eta=\mathrm{I}=0}, \tag{4.11}$$

где

$$Z^{(+)}_{mn} = \sum_q \omega (\overset{+}{m} \bar{q} \,|\, 0) \, \overset{*}{\omega} (\overset{+}{n} \bar{q} \,|\, 0);$$

$$Z^{(-)}_{mn} = \sum_q \omega (\overset{+}{q} \bar{m} \,|\, 0) \, \overset{*}{\omega} (\overset{+}{q} \bar{n} \,|\, 0); \qquad p_v = |\, c_v \,|^2 \tag{4.12}$$

и использованы матричные обозначения типа (3.15)

$$\mathrm{S}_{(+)} = \begin{pmatrix} \bar{S}^c(x, y) & i \sum\limits_n {}^-\psi_n(x) \, {}^-\bar{\psi}_n(y) \\ 0 & \bar{S}^c_-(x, y) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{S}_{(-)} = \begin{pmatrix} \bar{S}^c(x, y) & 0 \\ - i \sum\limits_m {}^+\psi_m(x) \, {}^+\bar{\psi}_m(y) & \bar{S}^c_-(x, y) \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

$$\mathrm{D}_0 = \mathrm{D}_0 (\,|\, \alpha) \big|_{\alpha=0},$$

$$\bar{S}^c_-(x, y) = i \overset{*}{c}{}_v^{-1} \langle 0, \mathrm{in} \,|\, \psi(x) \bar{\psi}(y) T \,|\, 0, \widetilde{\mathrm{out}} \rangle.$$

Замечая, что

$$[\exp W^{(+)}] \, a_n^+(\mathrm{out}) \, [\exp(-W^{(+)})] = \sum_m a_m^+(\mathrm{out}) \, Z^{(+)}_{mn},$$

$$[\exp W^{(-)}] \, b_n^+(\mathrm{out}) \, [\exp(-W^{(-)})] = \sum_m b_m^+(\mathrm{out}) \, Z^{(-)}_{mn},$$

$$W^{(+)} = \sum_{m,n} a_m^+(\mathrm{out}) (\ln Z^{(+)})_{mn} \, a_n(\mathrm{out}),$$

$$W^{(-)} = \sum_{m,n} b_m^+(\mathrm{out}) (\ln Z^{(-)})_{mn} \, b_n(\mathrm{out}), \tag{4.14}$$

получаем окончательно

$$\langle f_+ \rangle = \sum_{M=0}^{\infty} (M!)^{-1} \sum_{\{m\}} \langle 0, \mathrm{out} \,|\, a_{m_M}(\mathrm{out}) \ldots a_{m_1}(\mathrm{out}) f_+ (a(\mathrm{out}),$$

$$a^+(\mathrm{out})) \, \rho_+ a^+_{m_1}(\mathrm{out}) \ldots a^+_{m_M}(\mathrm{out}) \,|\, 0, \mathrm{out} \rangle \equiv \mathrm{Tr}_+ (f_+ \rho_+), \tag{4.15}$$

$$\langle f_- \rangle = \sum_{M=0}^{\infty} (M!)^{-1} \sum_{\{m\}} \langle 0, \mathrm{out} \,|\, b_{m_1}(\mathrm{out}) \ldots b_{m_M}(\mathrm{out}) f_- (b(\mathrm{out}),$$

$$b^+(\mathrm{out})) \, \rho_- b^+_{m_M}(\mathrm{out}) \ldots b^+_{m_1}(\mathrm{out}) \,|\, 0, \mathrm{out} \rangle \equiv \mathrm{Tr}_- (f_- \rho_-), \tag{4.16}$$

где

$$\rho_{\pm} = p_v \exp\left\{e \frac{\delta}{\delta\eta} \gamma \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta \mathbf{I}}\right\} \exp\left[i\left(\bar{\eta} S_{(\pm)}\eta - \frac{1}{2}\mathbf{I}D_0\mathbf{I}\right)\right] \times$$
$$\times \exp(\bar{B}^{(\pm)}) \exp(W^{(\pm)}) \exp(B^{(\pm)})\,|_{\bar{\eta}=\eta=\mathbf{I}=0} \tag{4.17}$$

— матрица плотности, описывающая электроны (+) и позитроны (—), рожденные внешним полем из вакуума;

$$\bar{B}^{(+)} = \sum_m a_m^+(\text{out})\left[-i^+\eta_{1m} + \sum_n \omega(\overset{+}{m}\bar{n}\,|\,0)\, i^-\eta_{2n}\right];$$
$$B^{(+)} = \sum_m \left[i^+\bar{\eta}_{2m} - \sum_n i^-\bar{\eta}_{1n}\overset{*}{\omega}(\overset{+}{m}\bar{n}\,|\,0)\right] a_m(\text{out});$$
$$\bar{B}^{(-)} = \sum_n b_n^+(\text{out})\left[i^-\bar{\eta}_{1n} + \sum_l i^+\bar{\eta}_{2l}\,\omega(\overset{+}{l}\bar{n}\,|\,0)\right]; \tag{4.18}$$
$$B^{(-)} = -\sum_n \left[i^-\eta_{2n} + \sum_l \overset{*}{\omega}(\overset{+}{l}\bar{n}\,|\,0)\, i^+\eta_{1l}\right] b_n(\text{out}).$$

Рассмотрим матрицы плотности (4.17) в нулевом порядке по радиационному взаимодействию. В этом случае

$$\rho_{\pm}^{(0)} = p_v \exp(W^{(\pm)}),$$

что совпадает с результатами работ [13—15].

Найдем теперь матрицу плотности частиц, рожденных внешним полем из начального состояния с определенным числом частиц:

$$|\,\text{in}\rangle = c^+_{\mathbf{k}_1\lambda_1} \ldots c^+_{\mathbf{k}_L\lambda_L} b^+_{m_1}(\text{in}) \ldots, b^+_{m_M}(\text{in})\, a^+_{n_1}(\text{in}) \ldots a^+_{n_N}(\text{in})\,|\,0, \text{in}\rangle.$$

Для вычисления матрицы плотности в рассматриваемом случае введем вспомогательный функционал

$$\mathbf{Z}_{\pm}(\alpha, \beta, \zeta) = \langle 0, \text{in}\,|\, V_2(\alpha_2, \beta_2, \zeta_2)\, U^{-1} f_{\pm} U V_1(\alpha_1, \beta_1 \zeta_1)\,|\,0, \text{in}\rangle. \tag{4.19}$$

Здесь U — полный оператор эволюции; $f_{\pm}$ — операторы наблюдаемых, введенные ранее;

$$V_2(\alpha_2, \beta_2, \zeta_2) = \exp\left\{\sum_n [\alpha_{2n} a_n(\text{in}) + \beta_{2n} b_n(\text{in})] + \sum_{\mathbf{k},\lambda} \zeta_{2\mathbf{k}\lambda} c_{\mathbf{k}\lambda}\right\};$$
$$V_1(\alpha_1 \beta_1, \zeta_1) = \exp\left\{\sum_n [a_n^+(\text{in})\,\alpha_{1n} + b_n^+(\text{in})\,\beta_{1n}] + \sum_{\mathbf{k},\lambda} \zeta_{1\mathbf{k}\lambda} c^+_{\mathbf{k}\lambda}\right\}, \tag{4.20}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 — антикоммутирующие параметры; ξ_1 и ξ_2 — коммутирующие параметры.

Функционал (4.19) является производящим функционалом для средних значений операторов $f_{\pm}$ по произвольному начальному состоянию. Например:

$$\langle f_{\pm}\rangle = \langle 0, \text{in}\,|\, a_n(\text{in})\, b_m(\text{in})\, c_{\mathbf{k}\lambda} f_{\pm} c^+_{\mathbf{k}\lambda} b^+_m(\text{in})\, a^+_n(\text{in})\,|\,0, \text{in}\rangle =$$
$$= \frac{\delta \mathbf{Z}_{\pm}(\alpha, \beta, \zeta)}{\delta\alpha_{2n}\delta\beta_{2m}\delta\zeta_{2\mathbf{k}\lambda}\delta\zeta_{1\mathbf{k}\lambda}\delta\beta_{1m}\delta\alpha_{1n}}\bigg|_{\alpha=\beta=\zeta=0}.$$

Для вычисления функционала $\mathbf{Z}_{\pm}(\alpha, \beta, \zeta)$ в формуле (4.19) аналогично предыдущему удобно перейти к усреднению по out-состояниям. Используя (4.3), нетрудно получить

$$UV_1(\alpha_1, \beta_1, \zeta_1)\,|\,0, \text{in}\rangle = \exp\left\{e \frac{\delta}{\delta\eta} \gamma \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta I}\right\} \exp\left[i\left(\bar{\eta} S^c \eta - \frac{1}{2} I D_0^c I\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left[-i \sum_{\mathbf{k}\lambda} {}^+I^{\mathbf{k}\lambda}\zeta_{1\mathbf{k}\lambda} - i \sum_n {}_+\bar{\eta}_n \alpha_{1n} + i \sum_m {}_-\eta_m \beta_{1m} -\right.$$
$$\left. - \sum_{m,n} \beta_{1m}\,\omega(0\,|\,\bar{m}\overset{+}{n})\,\alpha_{1n}\right] \sum_{L,M,N=0}^{\infty} (L!M!N!)^{-1} \sum_{\substack{\{m\}\{n\} \\ \{\mathbf{k}\}\lambda=1,2)}} c^+_{\mathbf{k}_L\lambda_L} \cdots$$

$$\ldots c^+_{\mathbf{k}_1\lambda_1} b^+_{n_N}(\text{out}) \ldots b^+_{n_1}(\text{out})\, a^+_{m_1}(\text{out}) \ldots a^+_{m_M}(\text{out})\,|\,0,\text{out}\rangle \times$$
$$\times \langle 0, \widetilde{\text{out}}\,|\prod_{j=M}^{1}\Big[\tilde a_{m_j}(\text{out}) - i\,{}^+\eta_{m_j} + \sum_{s_j}\omega(\overset{+}{m}_j\,|\,\overset{+}{s}_j)\,\alpha_{1s_j}\Big] \times$$
$$\times \prod_{p=1}^{N}\Big[\tilde b_{n_p}(\text{out}) + i\,{}^-\overline{\eta}_{n_p} + \sum_{q_p}\omega(\bar n_p\,|\,\bar q_p)\,\beta_{1q_p}\Big]\,|\,0,\text{in}\rangle \times \tag{4.21}$$
$$\times \prod_{l=1}^{L}\left(-i\,{}^-I^{\mathbf{k}_l\lambda_l} + \zeta_{1\mathbf{k}_l\lambda_l}\right)\Big|_{\overline{\eta}=\eta=I=0},$$

где

$${}^+I^{\mathbf{k}\lambda} = \int dx\, I^\mu(x)\,{}_+f_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x);\ {}_+\overline{\eta}_n = \int dx\,\overline{\eta}(x)\,{}_+\psi_n(x);$$
$${}_-\eta_m = \int dx\,{}_-\overline{\psi}_m(x)\,\eta(x);\qquad \omega(0\,|\,\bar m\overset{+}{n}) = c_v^{-1}\langle 0,\widetilde{\text{out}}\,|\,b^+_m(\text{in})\,a^+_n(\text{in})\,|\,0,\text{in}\rangle,$$

а остальные обозначения введены раньше.

Подставляя (4.21) в (4.19) и выполняя такие же, как и при получении (4.15), (4.16), выкладки, получим

$$\mathbf{Z}_+(\alpha,\beta,\zeta) = \sum_{M=0}^{\infty}(M!)^{-1}\sum_{\{m\}}\langle 0,\text{out}\,|\,a_{m_1}(\text{out})\ldots a_{m_M}(\text{out}) \times$$
$$\times f_+(a(\text{out}), a^+(\text{out}))\,\rho_+(\alpha,\beta,\zeta)\,a^+_{m_M}(\text{out})\ldots a^+_{m_1}(\text{out})\,|\,0,\text{out}\rangle \equiv \tag{4.22}$$
$$\equiv \mathrm{Tr}_+[f_+\rho_+(\alpha,\beta,\zeta)],$$

$$\mathbf{Z}_-(\alpha,\beta,\zeta) = \sum_{N=0}^{\infty}(N!)^{-1}\sum_{\{n\}}\langle 0,\text{out}\,|\,b_{n_N}(\text{out})\ldots b_{n_1}(\text{out})\,f_-(b(\text{out}),$$
$$b^+(\text{out}))\,\rho_-(\alpha,\beta,\zeta)\,b^+_{n_1}(\text{out})\ldots b^+_{n_N}(\text{out})\,|\,0,\text{out}\rangle \equiv \tag{4.23}$$
$$\equiv \mathrm{Tr}_-[f_-\rho_-(\alpha,\beta,\zeta)],$$

где

$$\rho_+(\alpha,\beta,\zeta) = p_v \exp\left\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\frac{\delta}{\delta I}\right\}\exp\left[i\left(\overline{\eta}S_{(+)}\eta - \frac{1}{2}\mathbf{I}D_0\mathbf{I}\right)\right] \times$$
$$\times \exp\Big\{-i\sum_{\mathbf{k},\lambda}({}^+I_1^{\mathbf{k}\lambda} - {}^+I_2^{\mathbf{k}\lambda})\,\zeta_{1\mathbf{k}\lambda} + i\sum_{\mathbf{k},\lambda}({}^-I_2^{\mathbf{k}\lambda} - {}^-I_1^{\mathbf{k}\lambda})\,\zeta_{2\mathbf{k}\lambda} + \sum_{\mathbf{k},\lambda}\zeta_{1\bar{\mathbf{k}}\lambda}\zeta_{2\mathbf{k}\lambda} -$$
$$- i\sum_n {}_+\overline{\eta}_{1n}\alpha_{1n} + i\sum_n \alpha_{2n}\,{}_+\eta_{2n} + i\sum_m\Big[{}_-\eta_{1m} - \sum_l {}^-\eta_{2l}\,\omega(\bar l\,|\,\bar m)\Big]\beta_{1m} -$$
$$- i\sum_m \beta_{2m}\Big[{}_-\overline{\eta}_{2m} - \sum_l \overset{*}{\omega}(\bar l\,|\,\bar m)\,{}^-\overline{\eta}_{1l}\Big] - \sum_{m,n}\beta_{1m}\,\omega(0\,|\,\bar m\overset{+}{n})\,\alpha_{1n} -$$
$$- \sum_{m,n}\alpha_{2n}\overset{*}{\omega}(0\,|\,m\overset{+}{n})\,\beta_{2m} + \sum_{l,m,n}\beta_{2m}\overset{*}{\omega}(\bar n\,|\,\bar m)\,\omega(\bar n\,|\,\bar l)\,\beta_{1l}\Big\} \times$$
$$\times \exp\Big\{\bar B^{(+)} + \sum_{m,l}a^+_m(\text{out})\Big[\omega(\overset{+}{m}\,|\,\overset{+}{l})\,\alpha_{1l} - \sum_n \omega(\overset{+}{m}\bar n\,|\,0)\,\overset{*}{\omega}(\bar n\,|\,\bar l)\,\beta_{2l}\Big\}\,e^{W^{(+)}} \times$$
$$\times \exp\Big\{B^{(+)} + \sum_{m,l}\Big[\alpha_{2l}\overset{*}{\omega}(\overset{+}{m}\,|\,\overset{+}{l}) - \sum_n \beta_{1l}\,\omega(\bar n\,|\,\bar l)\,\overset{*}{\omega}(\overset{+}{m}\bar n\,|\,0)\Big] \times \tag{4.24}$$
$$\times a_m(\text{out})\Big\}\Big|_{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=0};$$

$$\rho_-(\alpha,\beta,\zeta) = p_v \exp\left\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\frac{\delta}{\delta I}\right\}\exp\left[i\left(\overline{\eta}S_{(-)}\eta - \frac{1}{2}\mathbf{I}D_0\mathbf{I}\right)\right] \times$$
$$\times \exp\Big\{-i\sum_{\mathbf{k},\lambda}({}^+I_1^{\mathbf{k}\lambda} - {}^+I_2^{\mathbf{k}\lambda})\,\zeta_{1\mathbf{k}\lambda} + i\sum_{\mathbf{k},\lambda}({}^-I_2^{\mathbf{k}\lambda} - {}^-I_1^{\mathbf{k}\lambda})\,\zeta_{2\mathbf{k}\lambda} + \sum_{\mathbf{k}\lambda}\zeta_{1\mathbf{k}\lambda}\zeta_{2\mathbf{k}\lambda} -$$

$$-i\sum_n\Big[{}_+\overline{\eta}_{1n}-\sum_m{}^+\overline{\eta}_{2m}\omega(\overset{+}{m}\,|\,\overset{+}{n})\Big]\alpha_{1n}+$$
$$+i\sum_n\alpha_{2n}\Big[{}_+\eta_{2n}-\sum_m\overset{*}{\omega}(\overset{+}{m}\,|\,\overset{+}{n})^+\eta_{1m}\Big]+i\sum_m{}_-\eta_{1m}\beta_{1m}-i\sum_m\beta_{2m}-\overline{\eta}_{2m}-$$
$$-\sum_{m,n}\beta_{1m}\omega(0\,|\,\overline{m}\overset{+}{n})\alpha_{1n}-\sum_{m,n}\alpha_{2n}\overset{*}{\omega}(0\,|\,\overline{m}\overset{+}{n})\beta_{2m}+$$
$$+\sum_{l,m,n}\alpha_{2n}\overset{*}{\omega}(\overset{+}{m}\,|\,\overset{+}{n})\,\omega(\overset{+}{m}\,|\,\overset{+}{l})\,\alpha_{1l}\Big\}\exp\Big\{\overline{B}^{(-)}+\sum_{n,m}b_n^+(\mathrm{out})\Big[\omega(\overline{n}\,|\,\overline{m})\,\beta_{1m}+$$
$$+\sum_l\omega(\overset{+}{l}\overline{n}\,|\,0)\,\overset{*}{\omega}(\overset{+}{l}\,|\,\overset{+}{m})\,\alpha_{2m}\Big]\Big\}e^{W^{(-)}}\exp\Big\{B^{(-)}+\sum_{n,m}\Big[\beta_{2m}\overset{*}{\omega}(\overline{n}\,|\,\overline{m})+$$
$$+\sum_l\alpha_{1m}\omega(\overset{+}{l}\,|\,\overset{+}{m})\,\overset{*}{\omega}(\overset{+}{l}\overline{n}\,|\,0)\Big]\Big\}b_n(\mathrm{out})\Big\}\Big|_{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=0}$$

— производящие матрицы плотности.

Полагая в (4.24), (4.25) $\alpha=\beta=\zeta=0$, получим результат (4.17). А если в (4.24) и (4.25) ограничиться нулевым порядком по радиационному взаимодействию и положить $\zeta=0$, то получим матрицы плотности, совпадающие с результатом работы [16].

Используя функции ${}_+\Psi_n(x)$, ${}_-\overline{\Psi}_n(x)$ (2.15) и ${}_+\mathcal{F}_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x)$ (2.21), матрицы плотности (4.24) и (4.25) можно представить в виде

$$\rho_\pm(\alpha,\beta,\zeta)=p_v\exp\Big\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\frac{\delta}{\delta\mathbf{I}}\Big\}\exp\Big[i\Big(\overline{\eta}S_{(\pm)}\eta-\frac{1}{2}\mathbf{I}D_0\mathbf{I}\Big)\Big]\times$$
$$\times\exp(\overline{B}^{(\pm)})\exp(W^{(\pm)})\exp(B^{(\pm)})\Big|_{\overline{\eta}=\overline{\mathbf{K}},\,\eta=\mathbf{L},\,\mathbf{I}=\mathbf{C}},\qquad(4.26)$$

где

$$\overline{\mathbf{K}}=(\overline{K}_1,\overline{K}_2);\qquad\mathbf{L}=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix};\qquad\mathbf{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix};$$
$$\overline{K}_1(x)=-\sum_m\beta_{1m}\,{}_-\overline{\Psi}_m(x)\overleftarrow{\mathcal{D}}_x;\qquad\overline{K}_2(x)=-\sum_n\alpha_{2n}\,{}_+\overline{\Psi}_n(x)\overleftarrow{\mathcal{D}}_x;$$
$$L_1(x)=\sum_n\overrightarrow{\mathcal{D}}_x\,{}_+\Psi_n(x)\,\alpha_{1n};\qquad L_2(x)=\sum_m\overrightarrow{\mathcal{D}}_x\,{}_-\Psi_m(x)\,\beta_{2m};\qquad(4.27)$$
$$C_{1\mu}(x)=-\sum_{\mathbf{k},\lambda}\zeta_{1\mathbf{k}\lambda}\,\Box\,{}_+\mathcal{F}_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x);\qquad C_{2\mu}(x)=-\sum_{\mathbf{k},\lambda}\zeta_{2\mathbf{k}\lambda}\,\Box\,{}_+\overset{*}{\mathcal{F}}_{\mu\mathbf{k}\lambda}(x).$$

Найдем теперь, используя матрицы плотности $\rho_\pm$ (4.17), среднее число электронов ${}^{(+)}n_m$ и среднее число позитронов ${}^{(-)}n_m$ в состоянии с квантовыми числами m:

$${}^{(+)}n_m=\mathrm{Tr}_+\{a_m^+(\mathrm{out})\,a_m(\mathrm{out})\,\rho_+\},\qquad{}^{(-)}n_n=\mathrm{Tr}_-\{b_m^+(\mathrm{out})\,b_m(\mathrm{out})\,\rho_-\}.\qquad(4.28)$$

Вычисляя трейс, получаем

$${}^{(\pm)}n_m={}^{(\pm)}n_m^{(0)}\pm\exp\Big\{e\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\frac{\delta}{\delta\mathbf{I}}\Big\}[\overline{\eta}\,{}^{\pm}\Lambda_m\eta]\times$$
$$\times\exp\Big[i\Big(\overline{\eta}\tilde{\tilde{S}}_0\eta-\frac{1}{2}\mathbf{I}D_0\mathbf{I}\Big)\Big]\Big|_{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=0},\qquad(4.29)$$

где

$${}^{(\pm)}n_m^{(0)}=[G(\pm|\mp)\,G(\mp|\pm)]_{mm}$$

— среднее число электронов (+) (среднее число позитронов (—)), рожденных внешним полем из вакуума без учета радиационного взаимодействия;

$${}^{\pm}\Lambda_m=\sum_{\mathbf{k},l}\begin{pmatrix}{}_-\varphi_l(x)\,G({}_-\|\pm)_{lm}\,G(\pm|{}_+)_{mk}\,{}_+\overline{\varphi}_{\mathbf{k}}(y)&{}_-\varphi_l(x)\,G({}_-|\pm)_{lm}\,G(\pm|{}_-)_{mk}\,{}_-\overline{\varphi}_k(y)\\{}_+\varphi_l(x)\,G({}_+|\pm)_{lm}\,G(\pm|{}_+)_{mk}\,{}_+\varphi_{\mathbf{k}}(y)&{}_+\varphi_l(x)\,G({}_+|\pm)_{lm}\,G(\pm|{}_-)_{mk}\,{}_-\overline{\varphi}_k(y)\end{pmatrix};$$

$$G(^{\pm}|_{\pm})_{kl} = \int d\mathbf{x}\, {}^{\pm}\varphi_k^{+}(x)\, {}_{\pm}\varphi_l(x); \quad G(_{\pm}|^{\pm})_{kl} = [G(^{\pm}|_{\pm})^{+}]_{kl} = \int d\mathbf{x}\, {}_{\pm}\varphi_k^{+}(x)\, {}^{\pm}\varphi_l(x). \tag{4.30}$$

Кроме того, в (4.29) использованы матричные обозначения (3.15), где матрицу $D_0(|\,\alpha)$ надо взять при значениях параметров $\alpha_{kl} = 0$.

Используя формулу

$$e^{A}Be^{A} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{[A, [A, \ldots [A}_{m}, B] \cdots]], \tag{4.31}$$

для средних чисел электронов и позитронов получаем

$$\begin{aligned}{}^{(\pm)}n_m = {}^{(\pm)}n_m^{(0)} \pm e \int dx\, {}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x)\, \gamma^{\mu}\, {}^{(\pm)}\varphi_m(x) \frac{\delta \mathbf{Z}_{av}}{\delta \mathbf{I}^{\mu}(x)}\Big|_{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=0} \pm \\ \pm e^2 \int dx\, dy\, {}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x)\, \gamma^{\mu} \frac{\delta}{\delta x(\overline{\eta})} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \gamma^{\nu}\, {}^{(\pm)}\varphi_m(y) \frac{\delta^2 \mathbf{Z}_{av}}{\delta \mathbf{I}^{\mu}(x)\, \delta \mathbf{I}^{\nu}(y)}\Big|_{\overline{\eta}=\eta=\mathbf{I}=0},\end{aligned} \tag{4.32}$$

где

$$\mathbf{Z}_{av} = \exp\left\{e \frac{\delta}{\delta \eta} \gamma \frac{\delta}{\delta \overline{\eta}} \frac{\delta}{\delta \mathbf{I}}\right\} \exp\left[i\left(\overline{\eta}\tilde{\tilde{\mathbf{S}}}_0\eta - \frac{1}{2}\mathbf{I}\mathbf{D}_0\mathbf{I}\right)\right]$$

— производящий функционал для функций Грина (3.1) [1, 2, 5] и введены обозначения

$$\begin{aligned}{}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x) &= \sum_l (G(^{\pm}|_{+})_{ml}\, {}_{+}\overline{\varphi}_l(x),\ G(^{\pm}|_{-})_{ml}\, {}_{-}\overline{\varphi}_l(x)), \\ {}^{(\pm)}\varphi_m(x) &= \sum_l \begin{pmatrix} {}_{-}\varphi_l(x)\, G(_{-}|^{\pm})_{lm} \\ {}_{+}\varphi_l(x)\, G(_{+}|^{\pm})_{lm} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Перейдем в (4.32) к связным функциям Грина с помощью функционала

$$\mathbf{W} = i \ln \mathbf{Z}_{av}. \tag{4.34}$$

Тогда

$$\begin{aligned}{}^{(\pm)}n_m = {}^{(\pm)}n_m^{(0)} \pm \Big\{ &- ie \int dx\, {}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x)\, \gamma^{\mu}\, {}^{(\pm)}\varphi_m(x)\, \mathbf{A}_{\mu}(x) + \\ &+ ie^2 \int dx\, dy\, \mathbf{A}_{\mu}(x)\, {}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x)\, \gamma^{\mu} \mathbf{S}(x, y)\, \gamma^{\nu}\, {}^{(\pm)}\varphi_m(y)\, \mathbf{A}_{\nu}(y) - \\ &- e^2 \int dx\, dy\, {}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x)\, \gamma^{\mu} \mathbf{S}(x, y)\, \gamma^{\nu}\, {}^{(\pm)}\varphi_m(y)\, \mathbf{D}_{\nu\mu}(y, x) - \\ &- e^2 \int dx\, dy\, {}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x)\, \gamma^{\mu} \frac{\delta \mathbf{S}(x, y)}{\delta \mathbf{I}^{\mu}(x)} \gamma^{\nu}\, {}^{(\pm)}\varphi_m(y)\, \mathbf{A}_{\nu}(y) - \\ &- e^2 \int dx\, dy\, \mathbf{A}_{\mu}(x)\, {}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x)\, \gamma^{\mu} \frac{\delta \mathbf{S}(x, y)}{\delta \mathbf{I}^{\nu}(y)} \gamma^{\nu}\, {}^{(\pm)}\varphi_m(y) - \\ &- ie^2 \int dx\, dy\, {}^{(\pm)}\overline{\varphi}_m(x)\, \gamma^{\mu} \frac{\delta^2 S(x, y)}{\delta \mathbf{I}^{\mu}(x)\, \delta \mathbf{I}^{\nu}(y)} \gamma^{\nu}\, {}^{(\pm)}\varphi_m(y) \Big\}\Big|_{\mathbf{I}=0},\end{aligned} \tag{4.35}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mu}(x) &= \frac{\delta \mathbf{W}}{\delta \mathbf{I}^{\mu}(x)}\Big|_{\overline{\eta}=\eta=0}, \quad \mathbf{S}(x, y) = \frac{\delta^2 \mathbf{W}}{\delta \overline{\eta}(x)\, \delta \eta(y)}\Big|_{\overline{\eta}=\eta=0}, \\ \mathbf{D}_{\mu\nu}(x, y) &= \frac{\delta^2 \mathbf{W}}{\delta \mathbf{I}^{\mu}(x)\, \delta \mathbf{I}^{\nu}(y)}\Big|_{\overline{\eta}=\eta=0}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Выражение (4.35) можно выразить через следующие вершинные функции:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}^{\lambda}(x, y; z) &= -\frac{\delta \mathbf{S}^{-1}(x, y)}{e\delta \mathbf{A}_{\lambda}(z)}, \quad \mathbf{F}^{\lambda\mu\varkappa}(x, y; z) = -\frac{\delta \mathbf{D}^{-1\lambda\mu}(x, y)}{e\delta \mathbf{A}_{\varkappa}(z)}, \\ \mathbf{K}^{\lambda\mu}(x, y; x', y') &= -\frac{\delta^2 \mathbf{S}^{-1}(x, y)}{e\delta \mathbf{A}_{\lambda}(x')\, e\delta \mathbf{A}_{\mu}(y')}.\end{aligned} \tag{4.37}$$

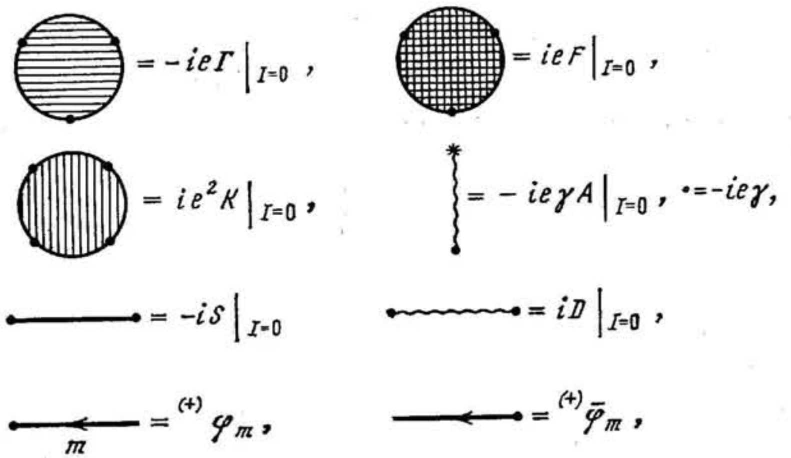
Учитывая (4.36) и (4.37), получаем

$$\frac{\delta \mathbf{S}(x, x')}{\delta \mathbf{I}^{\mu}(x)} = e\int dy\, dy'\, dz \mathbf{S}(x, y)\, \boldsymbol{\Gamma}^{\lambda}(y, y'; z)\, \mathbf{D}_{\lambda\mu}(z, x)\, \mathbf{S}(y', x'),$$

$$\frac{\delta \mathbf{S}(x, x)}{\delta \mathbf{I}^{\nu}(x')} = e\int dy\, dy'\, dz \mathbf{S}(x, y)\, \boldsymbol{\Gamma}^{\lambda}(y, y'; z)\, \mathbf{D}_{\lambda\nu}(z, x')\, \mathbf{S}(y', x'),$$

$$\frac{\delta^2 \mathbf{S}(x, x')}{\delta \mathbf{I}^{\mu}(x)\, \delta \mathbf{I}^{\nu}(x')} = e^2\int dy\, dy'\, dz\, dz' \mathbf{S}(x, y)\, \mathbf{K}^{\varkappa\lambda}(y, y'; z, z')\, \mathbf{D}_{\varkappa\mu}(z, x)\, \mathbf{D}_{\lambda\nu}(z', x') \times$$
$$\times \mathbf{S}(y', x') + e^2\int dy\, dy'\, dy''\, dz\, dz'\, dz'' [\mathbf{S}(x, y'')\, \boldsymbol{\Gamma}^{\varkappa}(y'', z'; z'') \times$$
$$\times \mathbf{D}_{\varkappa\mu}(z'', x)\, \mathbf{S}(z', y)\, \boldsymbol{\Gamma}^{\lambda}(y, y'; z)\, \mathbf{D}_{\lambda\nu}(z, x')\, \mathbf{S}(y', x') + \mathbf{S}(x, y)\, \boldsymbol{\Gamma}^{\lambda}(y, y'; z) \times$$
$$\times \mathbf{D}_{\lambda\lambda'}(z, y'')\, \mathbf{F}^{\lambda'\mu'\varkappa}(y'', z'; z'')\, \mathbf{D}_{\varkappa\mu}(z'', x)\, \mathbf{D}_{\mu'\mu}(z', x')\, \mathbf{S}(y', x') +$$
$$+ \mathbf{S}(x, y)\, \boldsymbol{\Gamma}^{\lambda}(y, y'; z)\, \mathbf{D}_{\lambda\nu}(z, x')\, \mathbf{S}(y', y^{n})\, \boldsymbol{\Gamma}^{\varkappa}(y'', z'; z'')\, \mathbf{D}_{\varkappa\mu}(z'', x)\, \mathbf{S}(z', x')]. \tag{4.38}$$

Если ввести обозначения



(4.39)

то для среднего числа рожденных электронов получаем диаграммное представление (4.41).

Аналогичное представление можно получить и для среднего числа позитронов.

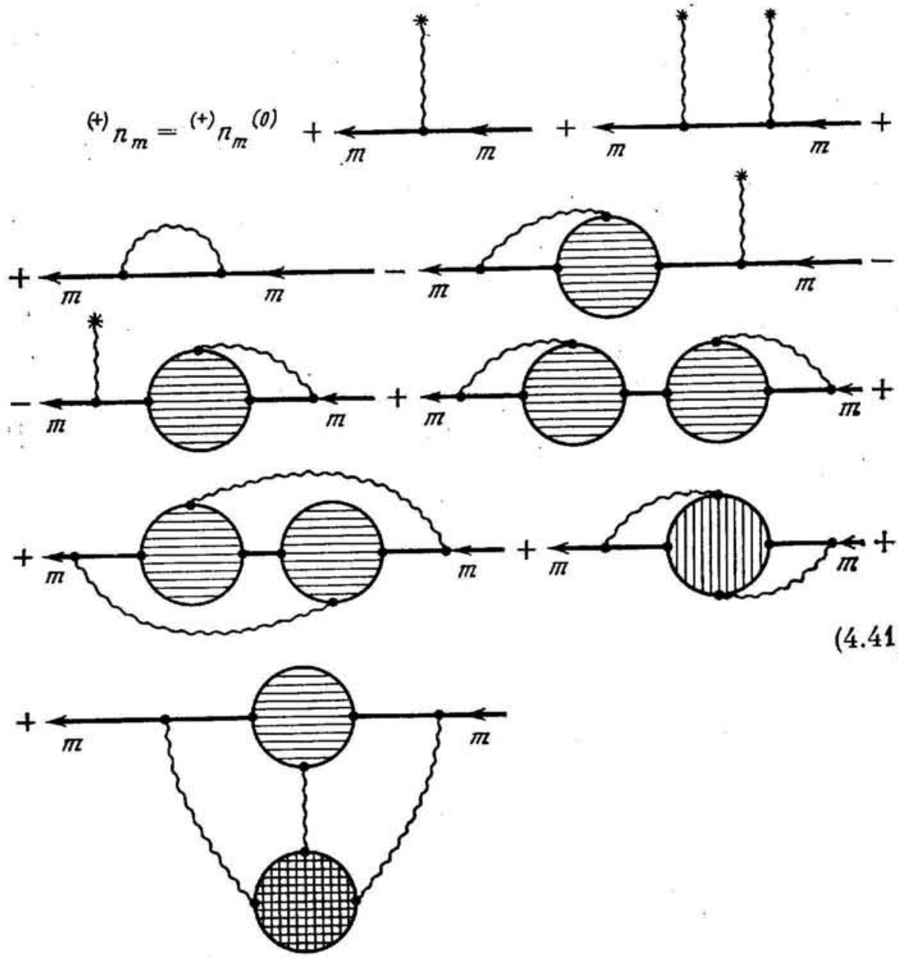
В заключение выпишем выражение для среднего числа рожденных электронов во втором порядке по радиационному взаимодействию:

$${}^{(+)}n_m^{(2)} = {}^{(+)}n_m^{(0)} + 2\,\mathrm{Im}\left\{\int dx\, dy \sum_{k,l} G({}^{+}|_{+})_{mk}\, {}_{+}\overline{\varphi}_k(x)\,(-ie\gamma^{\mu})\, {}_{-}\varphi_l(x)\, G({}_{-}|^{+})_{lm} \times\right.$$
$$\times iD_0^{\mathrm{ret}}(x-y)\,\widetilde{\widetilde{J}}_{\mu}(y) + i\int dx\, dy \sum_{k,l} [G({}^{+}|_{+})_{mk}\, {}_{+}\overline{\varphi}_k(x)\,(-ie\gamma^{\mu}) \times$$
$$\times i\widetilde{\widetilde{S}}^{c}(x, y)\,(-ie\gamma_{\mu})_{-}\,\varphi_l(y)\, G({}_{-}|^{+})_{lm}\, iD_0^{c}(x-y) + G({}^{+}|_{+})_{mk}\, {}_{+}\overline{\varphi}_k(x) \times$$
$$\times (-ie\gamma^{\mu})\, i\widetilde{\widetilde{S}}^{c}(x, y)\,(-ie\gamma_{\mu})_{+}\,\varphi_l(y)\, G({}_{+}|^{+})_{lm}\, iD_0^{c}(x-y)\,\theta(y_0 - x_0) +$$
$$+ G({}^{+}|_{-})_{mk}\, {}_{-}\overline{\varphi}_k(x)\,(-ie\gamma^{\mu})\, i\widetilde{\widetilde{S}}^{c}(x, y)\,(-ie\gamma_{\mu})\, {}_{-}\varphi_l(y)\, G({}_{-}|^{+})_{lm} \times$$
$$\left.\times iD_0^{c}(x-y)\,\theta(x_0 - y_0)]\right\}, \tag{4.40}$$

где

$$D_0^{\mathrm{ret}}(x-y) = D_0^{c}(x-y) + D_0^{(+)}(x-y); \qquad \widetilde{\widetilde{J}}^{\mu}(y) = ie\,\mathrm{tr}\,\gamma^{\mu}\widetilde{\widetilde{S}}^{c}(y, y),$$

а остальные обозначения введены ранее.



(4.41)

В постоянном внешнем электрическом поле матрицы $G\,(\pm|_\pm)_{mk}$, $G\,(_\pm|^\pm)_{mk}$ диагональны и вычислены в [21]. Там же практически вычислены все конструкции, входящие в (4.40).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gitman D. M.* Process of arbitrary order in quantum electrodynamics with a pair-creating external field // J. Phys. A. 1977. Vol. 10. P. 2007—2020.
2. *Fradkin E. S., Gitman D. M.* Furry picture for quantum electrodynamics with pair-creating external field // Fortschr. Phys. 1981. Bd. 29. S. 381—411.
3. *Гаврилов С. П., Гитман Д. М., Шварцман Ш. М.* Соотношение унитарности в квантовой электродинамике с внешним полем, порождающим пары // Изв. вузов. Физика. 1980. № 3. С. 93—96.
4. *Гитман Д. М., Фрадкин Е. С., Шварцман Ш. М.* Оптическая теорема в квантовой электродинамике с нестабильным вакуумом. М., 1986. 43 с. (Препр./ФИАН; № 161).
5. *Гитман Д. М., Фрадкин Е. С., Шварцман Ш. М.* Квантовая электродинамика с внешним полем, нарушающим стабильность вакуума // Квантовая электродинамика с нестабильным вакуумом. М.: Наука, 1989. С. 3—207. (Тр. ФИАН; Т. 193).
6. *Fradkin E. S., Gitman D. M., Shvartsman Sh. M.* Optical theorem in quantum electrodynamics with unstable vacuum // Fortschr. Phys. 1988. Bd. 36. S. 67—93.
7. *Hawking S. W.* Particle creation by black hole // Commun. Math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199—220.
8. *Parker L.* Probability distribution of particle created by black hole // Phys. Rev. D — Part. and Fields. 1975. Vol. 12. P. 1519—1528.
9. *Hawking S. W.* Breakdown of predictability in gravitational collaps // Ibid. 1976. Vol. 14. P. 2460—2473.
10. *Hawking S. W.* Black hole and ther modynamics // Ibid. Vol. 13. P. 191—197.
11. *Wald R. M.* Stimulated emission effects in particle creation near black hole // Ibid. P. 3176—3182.

12. *Frolov V. P.* Null surface quantization and quantum field theory in asymptotic flat space—time // Fortschr. Phys. 1978. Bd. 26. S. 563—608.
13. *Frolov V. P., Gitman D. M.* Density matrix in quantum electrodynamics, equivalence principle and Hawking effect. Moscow, 1977. 11 p. (Prepr./PhIAN; N 15).
14. *Frolov V. P., Gitman D. M.* Density matrix in quantum electrodynamics, equivalence principle and Hawking effect // J. Phys. A. 1978. Vol. 15. P. 1329—1333.
15. *Гитман Д. М., Фролов В. П.* Матрица плотности в квантовой электродинамике, принцип эквивалентности и эффект Хокинга // ЯФ. 1978. Т. 28. С. 552—557.
16. *Бухбиндер И. Л., Гитман Д. М., Фролов В. П.* Матрица плотности для процессов рождения частиц во внешнем поле // Изв. вузов. Физика. 1980. № 6. С. 77—91.
17. *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978. Т. 2. 407 с.
18. *Келдыш Л. В.* Диаграммная техника для неравновесных процессов // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1515—1527.
19. *Buchbinder I. L., Fradkin E. S., Gitman D. M.* Quantum electrodynamics in curved space—time // Fortschr. Phys. 1981. Bd. 29. S. 187—218.
20. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965. 235 с.
21. *Вольфенгаут Ю. Ю., Гаврилов С. П., Гитман Д. М., Шварцман Ш. М.* Радиационные процессы во внешнем электромагнитном поле, порождающем пары // ЯФ. 1981. Т. 33. С. 743—757.