ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 29, вып. 6, 1979

ОКТОНИОНЫ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ [1)]

О. К. КАЛАШНИКОВ, С. Е. КОНШТЕЙН, Е. С. ФРАДКИН

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА АН СССР

(Поступила в редакцию 6 февраля 1979 г.)

Показано, что октавы могут играть существенную роль в современной теории поля. Продемонстрировано, что как лоренцевские, так и внутренние степени свободы могут быть адекватно описаны в терминах октав. Найдена октавная форма записи основных уравнений теории поля: уравнения Дирака, Максвелла и уравнения антидуальности для полей Янга–Миллса. Показано (на примере инстантонов для теории калибровочных полей Янга–Миллса), что решение этих уравнений также выражается через октавы. Представлена асимптотически-свободная E_8-модель единого (сильного, слабого и электромагнитного) взаимодействия. Приведены аргументы о целесообразности использования исключительных групп, как калибровочных.

Интерес к моделям теории поля, в основу которых положены исключительные группы, как калибровочные, в последнее время значительно возрос. Этот интерес стимулировался различными факторами, и соответственно изучение теорий, основанных на исключительных группах, проводилось в нескольких направлениях. Кратко эти направления можно представить как следующие: построение теории, в которой пространством состояний служит не комплексное гильбертово пространство, как в обычной теории поля, а октавное гильбертово пространство [1]; построение теории сильных взаимодействий, в которой кварки описывались бы октавными спинорами, а их удержание было бы простым алгебраическим следствием особых правил перемножения октав [2], и, наконец, построение единых моделей сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий, основанных на исключительных группах [3–5]. При этом делаются утверждения, что «настоящая теория» должна быть основана в той или иной степени на исключительной группе.

Исключительные группы обладают рядом замечательных свойств, которые побуждают все возрастающий интерес к их изучению. Здесь прежде всего обращает на себя внимание факт, связанный с конечным числом этих групп. Действительно, существует всего только пять исключительных групп — G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8 — и в отличие от бесконечной последовательности $SU(n)$-, $SO(n)$- и $SP(2n)$-групп, где трудно отдать предпочтение одной из них, здесь возможно изучить всю последовательность этих групп целиком. Далее, эти группы довольно естественным образом содержат $SU^c(3)$-группу, которая есть подгруппа автоморфизмов октав, оставляющей инвариантной некоторую мнимую единицу. Выделение $SU^c(3)$-группы в качестве прямого сомножителя в максимальной подгруппе исключительных групп, несомненно, является важным свойством последних и, как предполагается, будет одним из основных в будущей октавной теории поля, если, разумеется, таковая будет построена. Замечательным является также и то обстоятельство, что все представления ис-

1) Основные результаты этой работы были положены в основу лекции, прочитанной Е. С. Фрадкиным в Гарвардском университете (май, 1978 г.).

ключительных групп Ли свободны от аномалий [6]. Для групп G_2, F_4, E_7 и E_8, все представления которых вещественны или псевдовещественны [7], это утверждение очевидно, а для группы E_6, имеющей комплексные представления 27, $\overline{27}$, 351 и $\overline{351}$, этот факт можно доказать отдельно [6].

Привлекательным является тот факт, что исключительные группы типа E, будучи группами достаточно низкого ранга, имеют уже в фундаментальном мультиплете достаточно много вакансий для того, чтобы описать все наблюдаемые сейчас адроны и лептоны в рамках одного или максимум двух мультиплетов. В этой связи ряд авторов высказывают утверждение, что основной упор сейчас следует делать на изучение группы E_7, в рамках которой все реально наблюдаемые частицы можно разместить в одном фундаментальном 56-плете [4], в то время как при использовании групп E_6 приходится брать два мультиплета: 27 и $\overline{27}$ [3, 5], а в фундаментальном 248-плете группы E_8 оказывается слишком много «лишних» частиц. Однако другие авторы в то же самое время подчеркивают особое положение группы E_6 [5, 8], как единственной из исключительных групп, имеющей комплексные представления, и E_8-группы, как единственной группы Ли, у которой совпадают фундаментальное и присоединенное представление [8].

В этой работе мы будем касаться в основном двух аспектов применения исключительных групп и октонионов в теории поля. Вначале покажем, что лоренцевские степени свободы подобно изоспиновым могут быть описаны в терминах октав. При этом оказывается, что если представить спиноры, векторы и тензоры в виде «скалярных» октавных полей, то можно единообразно записать основные уравнения теории для полей Дирака, Максвелла и уравнение антидуальности для полей Янга – Миллса. Возможно на этом пути применение октав окажется достаточно удобным для получения классических решений этих уравнений. Затем будет представлена асимптотически-свободная E_6-модель единого взаимодействия.

1. Октонионы

8-мерная алгебра O со следующим законом умножения ее базисных векторов:

$$e_0e_i=e_ie_0=e_i,\quad i=1,\ldots,7,$$

$$e_ie_j=-\delta_{ij}e_0+\sum_{k=1}^{7}E_{ijk}e_k,\ i,\ j=1,\ldots,7,$$

где E_{ijk} – полностью антисимметричный объект с семью ненулевыми матричными элементами

$$E_{123}=E_{516}=E_{624}=E_{435}=E_{471}=E_{572}=E_{673}=1,$$

называется алгеброй Кэли или алгеброй октав.

Эти гиперкомплексные числа могут быть получены с помощью троекратного применения процедуры удвоения из обычных вещественных чисел. Эта процедура заключается в следующем. Пусть имеется некоторая система чисел X. Рассмотрим систему X^2 пар чисел из X, в которой обычным образом определено сложение, а умножение определено с помощью равенства

$$(x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)=(x_1\cdot x_2-\bar{y}_2\cdot y_1,\ y_1\cdot\bar{x}_2+y_2\cdot x_1),$$

$$\overline{(x,\ y)}=(\bar{x},\ -\bar{y}).$$

Тогда система X^2 называется удвоением набора X. При удвоении вещественных чисел мы получаем комплексные, при удвоении комплексных – кватернионы, при удвоении кватернионов получаются октавы.

Эти четыре числовые системы выделены из всех других теоремой Гурвица. Последняя утверждает, что если множество G обладает следующими свойствами:

1) G — конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел;

2) в этом векторном пространстве определено дистрибутивное умножение со свойствами:

a) $x\cdot(\alpha y+\beta z)=\alpha\cdot(x\cdot y)+\beta\cdot(x\cdot z)$,

b) $(\alpha x+\beta y)\cdot z=\alpha\cdot(x\cdot z)+\beta\cdot(y\cdot z)$,

c) $\exists 1\in G$: $x\cdot 1=1\cdot x=x$.

Здесь α, β — вещественные числа; $x, y, z\in G$;

3) G имеет положительно определенное симметричное скалярное произведение (x, y), и, следовательно, определена длина вектора $|x|=\sqrt{(x, x)}$;

4) выполняется условие $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

Тогда G — либо вещественные числа, либо комплексные, либо кватернионы, либо октавы.

Алгебра октав O не является ни коммутативной, ни ассоциативной, но принадлежит к альтернативным алгебрам, т. е. обладает следующим свойством: для любых трех октав их ассоциатор

$$\{x, y, z\}\overset{\mathrm{def}}{=}(x\cdot y)\cdot z-x\cdot(y\cdot z)$$

меняет знак при любой перестановке двух его аргументов.

2. Октонионная форма уравнений Максвелла, Дирака и Янга — Миллса [9]

Можно легко показать, что подгруппа группы автоморфизмов алгебры Кэли, оставляющей подалгебру кватернионов инвариантной, есть группа $SO(4)$. Ее представление на 8-мерной алгебре Кэли распадается на три неприводимых представления, действующих в 1-, 3- и 4-мерных подпространствах. Последнее есть пространство октонионов, имеющих форму $x=\alpha e_7+\beta e_4+\gamma e_5+\delta e_6$. Следовательно, вектор $u_\mu=(ie_7, e_1, e_5, e_6)$ мы можем рассматривать как лоренцевский и поставить лоренц-инвариантные октонионы в простое соответствие обычным физическим объектам

$$\begin{aligned} &x_\mu\to x=x_\mu u_\mu,\\ &\partial_\mu\to\nabla=u_\mu\partial_\mu,\\ &A_\mu\to A=u_\mu A_\mu,\\ &F_{\mu\nu}\to F={}^1/_2 F_{\mu\nu}u_\mu u_\nu+\partial_\mu A_\mu,\\ &j_\mu\to j=u_\mu j_\mu, \end{aligned}\qquad \begin{bmatrix}\psi_1+i\psi_2\\ \psi_3+i\psi_4\\ i\varphi_1+\varphi_2\\ i\varphi_3+\varphi_4\end{bmatrix}\to\Psi,$$

где

$$\Psi=e_0 f_1^*-e_1 f_2-e_2 f_1-e_3 f_2^*-e_4 f_4-e_5 f_3-e_6 f_4^*-e_7 f_3^* \text{ и } f_k=\psi_k+i\varphi_k.$$

Тогда уравнение Максвелла имеет следующий вид:

$${}^1/_2\nabla(F-\bar{F})=j,$$

где $F=\nabla A$, а уравнение Дирака, вместе со своим сопряженным, может быть представлено как

$$[i(\nabla+A)-m]\Psi=0.$$

Столь же просто может быть записано уравнение антидуальности для полей Янга — Миллса. В этом случае, однако, необходимо перейти к евклидовой формулировке теории и поставить в соответствие неабелевому полю Янга — Миллса A_μ матричное поле октонионов $A=u_\mu A_\mu$. Тогда уравнение антидуальности, полученное Белавиным и др. [10], имеет следующий вид:

$$(\nabla A+A^2)=\overline{(\nabla A+A^2)}.$$

и его решение (представляющее инстантоны 'Т Офта) может быть найдено непосредственно в терминах октав. Так, в случае $SU(2)$-калибровочной группы искомое решение представимо как

$$A=(\nabla e^{f\cdot A_0})\cdot e^{-f\cdot A_0}=(\nabla f)\cdot A_0,$$

где f — вещественная функция, которая должна быть найдена, $A_0=\sum_{k=1}^{3} e_k\cdot\sigma_k/2$ и σ_k — обычные матрицы Паули.

Для функции f после несложных преобразований мы легко получаем уравнение

$$\Delta f+\partial_\mu f\cdot\partial_\mu f=0,$$

которое в конечном итоге решается в явном виде

$$f=\ln\left[1+\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k}{|(x-x_k)|^2}\right].$$

Найденное решение есть решение, полученное ранее 'Т Офтом, однако для нас важно, что это решение получено здесь непосредственно в терминах октав.

3. E_6-группа. Некоторые общие замечания

Применение исключительных групп как калибровочных для построения единых моделей сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий также весьма привлекательно. Для этой цели, по нашему мнению, наиболее перспективной является E_6-группа, и соответствующая модель единого взаимодействия нами будет представлена. Ниже в этой связи будут представлены также необходимые сведения о математической конструкции E_6-группы, полезные для понимания дальнейшего материала.

Э. Картаном [11] было впервые замечено, а затем установлено К. Шевалле и др. [12], что октонионы, о которых шла речь выше, тесно связаны с исключительными группами. Так, в частности, хорошо известно, что группа автоморфизмов алгебры Кэли есть исключительная группа G_2. Другие исключительные алгебры Ли могут быть описаны в терминах 3×3 матриц, чьи элементы являются парами элементов числовых систем, удовлетворяющих теореме Гурвица. Математическая конструкция E_6-группы в этих терминах описывается как следующая. Рассмотрим Йорданову алгебру M_3^8, т. е. алгебру 3×3-эрмитовых матриц, элементами которых служат октонионы, а закон умножения матриц имеет следующий вид:

$$A\cdot B={}^1/_2(A\cdot B+B\cdot A).$$

Введем в рамках этой алгебры понятие детерминанта

$$D_{XYZ}=2\cdot\mathrm{Sp}(X\cdot Y\cdot Z)-[\mathrm{Sp}(X\cdot Y)\cdot\mathrm{Sp}\,Z+\mathrm{Sp}(Y\cdot Z)\cdot\mathrm{Sp}\,X+$$
$$+\mathrm{Sp}(Z\cdot X)\cdot\mathrm{Sp}\,Y]+\mathrm{Sp}\,X\cdot\mathrm{Sp}\,Y\cdot\mathrm{Sp}\,Z,$$

который есть симметричная трилинейная форма на M_3^8. Тогда группа линейных преобразований на M_3^8, которая оставляет детерминант D_{XYZ} инвариантным, есть E_6-группа. Ее фундаментальное представление действует непосредственно на M_3^8. Γ_{ij}^{ρ} — эрмитовы генераторы этого представления ($\rho=1,\ldots,78$; $i,j=1,\ldots,27$); $(F^\alpha)_{\beta\gamma}$ — структурные константы, такие, что $[\Gamma^\beta,\Gamma^\alpha]=F^{\beta\rho}{}_\alpha\,\Gamma^\rho$. Все соотношения между Γ^ρ, $F_{\beta\gamma}^{\alpha}$ и D_{ijk}, необходимые для построения E_6-модели, приведены в [13]. Основные соотношения есть

$$\Gamma^{\rho}_{ij}\Gamma^{\rho}_{kl}=-{}^1/_2 D_{iks}D^{sjl}+{}^1/_2\delta_{il}\delta_{jk}+{}^1/_6\delta_{ij}\delta_{kl},$$

$$\Gamma^{\alpha}_{is}D_{sjk}+\Gamma^{\alpha}_{js}D_{isk}+\Gamma^{\alpha}_{ks}D_{ijs}=0,$$

$$\mathrm{Sp}(\{\Gamma^{\alpha},\Gamma^{\beta}\}\Gamma^{\gamma})=0,$$

$$\mathrm{Sp}(\Gamma^{\alpha}\Gamma^{\beta})=3\delta^{\alpha\beta},\qquad D_{ijk}D^{ijl}=10\delta_{kl},$$

а их наиболее интересные следствия могут быть представлены как следующие:

$$\mathrm{Sp}(\Gamma^{\alpha}\Gamma^{\beta}\Gamma^{\gamma}\Gamma^{\delta})=\mathrm{Sp}(\Gamma^{\delta}\Gamma^{\gamma}\Gamma^{\beta}\Gamma^{\alpha}),$$

$$\mathrm{Sp}(\Gamma^{\alpha}\Gamma^{\beta}\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}+\Gamma^{\alpha}\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}\Gamma^{\beta}+\Gamma^{\alpha}\Gamma^{\nu}\Gamma^{\beta}\Gamma^{\mu})={}^4/_3(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\nu\beta}+\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}),$$

$$\mathrm{Sp}(F^{\alpha}F^{\beta}F^{\mu}F^{\nu}+F^{\alpha}F^{\mu}F^{\nu}F^{\beta}+F^{\alpha}F^{\nu}F^{\beta}F^{\mu})={}^9/_2(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\nu\beta}+\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}),$$

$$D_{aib}D^{bkc}D_{cjd}D^{dla}=-4D_{ijs}D^{skl}+5(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}).$$

4. Асимптотически-свободная E_6-модель [5, 14]

Асимптотическая свобода, открытая в неабелевых калибровочных теориях Гроссом, Вильчеком и Политцером [15], позволяет избежать трудности заряда-нуль, предсказанной в обычных теориях Ландау и Померанчуком, а также Фрадкиным [16], и делает эту теорию математически последовательной. Суть дела в том, что в области больших переданных импульсов калибровочная константа связи в этих теориях надлежащим образом стремится к нулю, т. е. на малых расстояниях происходит полная экранировка взаимодействия. Важность этого открытия была быстро осмыслена, и появились надежды на создание внутренне непротиворечивой теории единого взаимодействия в рамках калибровочной теории со спонтанным нарушением симметрии. Однако вскоре было замечено, что асимптотическая свобода и требования, предъявляемые к механизму Хиггса, находятся, как правило, во взаимном противоречии [17]. Дело в том, что достаточно сильное нарушение симметрии, т. е. введение в теорию достаточно большого числа скалярных мультиплетов, необходимых для получения физического спектра масс, разрушает асимптотическую свободу, в то время как слабое нарушение симметрии не способно обеспечить необходимое число векторных полей массами.

Тем не менее более детальное изучение уравнений ренормгруппы для таких теорий показало, что хотя фиксированные точки этих уравнений теперь, вообще говоря, являются нестабильными, однако в теории существует ряд решений без упомянутой выше трудности [18, 19]. Было замечено также, что такая теория имеет свойства, подобные тем, которыми обладает суперсимметричная теория, т. е. соотношения между различными константами связи здесь строго фиксированы.

Следующая трудность, которая возможно имеет место в некоторых теориях со спонтанным нарушением симметрии, была указана Гильденером [20]. Она связана с тем, что радиационные поправки имеют тенденцию ограничить произвол в выборе масс векторных частиц, возникающих за счет механизма Хиггса. Однако совсем недавно Калашниковым и Климовым [21] было доказано, что это утверждение не обладает универсальностью и реализуется, по всей видимости, только в исключительных случаях.

Таким образом, несмотря на все перечисленные выше трудности, в настоящее время возможность построения асимптотически-свободных теорий единого взаимодействия, обладающих должным физическим содержанием, можно считать доказанной. Достаточно полный материал по этому поводу можно найти в работе [22]. Здесь же мы приведем лишь одну такую модель, построенную в рамках E_6-группы.

Лагранжиан этой модели [5], данный в терминах обычных полей [2], распадается на ряд структурных блоков

$$L=L_g+L_{\bar{\psi}\psi\varphi}+L_{\varphi^4}+L_{\varphi^2}+L_{\varphi^3}.$$

Кинетический член L_g представляет поля, определяющие модель и их взаимодействие с калибровочным полем; член $L_{\bar{\psi}\psi\varphi}$ описывает взаимодействия типа Юкавы для спинорных и скалярных полей; члены L_{φ^4}, L_{φ^2} и L_{φ^3} определяют потенциал взаимодействия скалярных полей и по своей структуре есть однородные полиномы четвертой, второй и третьей степени соответственно. Константы, входящие в L_{φ^2} и L_{φ^3}, имеют размерность массы, а константы, входящие в L_{φ^4}, безразмерны.

Поля, фиксирующие содержание модели, следующие: 1) мультиплет векторных полей V_μ^ρ $(\rho=1,\ldots, 78)$, который преобразуется как присоединенное представление E_6-группы; 2) три мультиплета спинорных полей — B^α, η_k и θ^k, которые преобразуются соответственно как 78, 27 и $\overline{27}$; 3) три мультиплета скалярных полей Φ^α, M_k и N^k, преобразующиеся как 78, 27 и $\overline{27}$ соответственно.

Для L_g, согласно определению модели, его явное выражение может быть представлено как следующее:

$$L_g=-{}^1/_4(\partial_\mu V_\nu^\alpha-\partial_\nu V_\mu^\alpha+g_0 f^{\alpha\beta\gamma}V_\mu^\beta V_\nu^\gamma)^2+{}^1/_2[(\partial_\mu\delta^{\alpha\beta}+g_0 f^{\alpha\gamma\beta}V_\mu^\gamma)\Phi^\beta]^2-$$

$$-|(\partial_\mu\delta^{ab}-ig_0(\Gamma V_\mu)_a^b)M_b|^2-|(\partial_\mu\delta^{ab}-ig_0(\Gamma V_\mu)_a^b)N_b|^2+$$

$$+\bar{B}^\alpha[\gamma_\mu(\partial_\mu\delta^{\alpha\gamma}+g_0 f^{\alpha\beta\gamma}V_\mu^\beta)-m_B\delta^{\alpha\gamma}]B_\gamma+$$

$$+\bar{\eta}^a\gamma_\mu[\partial_\mu\delta^{ad}-ig_0(\Gamma V_\mu)_a^d]\eta_d+\bar{\theta}_a\gamma_\mu[\partial_\mu\delta^{ad}+ig_0(\Gamma V_\mu)_d^a]\theta^d,$$

причем выбранный здесь мультиплетный состав модели является оптимально возможным. Так, в частности, что касается набора скалярных полей, то такое содержание модели вообще не допускает дальнейших упрощений (как это было сделано, например, в [24]) и является минимальным. Выбор спинорных мультиплетов ограничен здесь менее жестко, однако должен быть согласован с асимптотической свободой и с феноменологией физики низких энергий.

Часть лагранжиана, которая описывает взаимодействие типа Юкавы, должна быть выбрана с особой тщательностью, так как играет немаловажную роль для обеспечения асимптотической свободы всей теории в целом. Для данной модели здесь имеем следующее простое выражение:

$$L_{\bar{\psi}\psi\varphi}=-kF_{\alpha\beta}^\rho\bar{B}^\alpha\Phi_\rho B^\beta+[f(\bar{B}\Gamma)_j^i K^j\eta_i+hD_{ijk}\bar{\eta}^i K^j\theta^k+f(\bar{B}\Gamma)_j^i K_i\theta^j+\mathrm{h.c.}],$$

которое является достаточным, хотя не наиболее общим в рамках этой теории [3]. Здесь

$$K\doteq\frac{1-\gamma_5}{2}M+\frac{1+\gamma_5}{2}N.$$

Член L_{φ^4} (который мы взяли) — также не наиболее общая 4-форма потенциала взаимодействия, инвариантного относительно E_6-группы, однако есть некоторая минимальная форма E_6 инвариантного взаимодействия, обеспечивающая асимптотическую свободу и желаемое нарушение сим-

---

[2]) Непосредственно в терминах октав запись этого лагранжиана можно найти в [23].

[3]) Можно доказать, что требование асимптотической свободы сводит максимально общее (для выбранного состава полей) взаимодействие типа Юкавы к выписанному выше.

метрии:

$$L_{\varphi^4}=-\frac{\lambda^2_{\Phi^4}}{8}(\Phi_\alpha\Phi^\alpha)^2-$$

$$-[{}^1/_2\lambda^2_{\Phi^2M^2}(M^+M)\Phi^2+{}^1/_4\delta^2_{\Phi^2M^2}\{\Gamma^\alpha,\Gamma^\beta\}_a(\Phi_\alpha\Phi_\beta)(M^{+,a}M_b)+$$

$$+{}^1/_2\lambda^2_{M^4}(M^+M)^2+{}^1/_4\delta^2_{M^4}D_{abf}D^{fcd}(M^{+,a}M^{+,b}M_cM_d)+(M\to N)]-$$

$$-\delta^2_{M^2N^2}(M^+N)(N^+M)-\lambda^2_{M^2N^2}(M^+M)(N^+N)-\gamma^2_{M^2N^2}D_{abf}D^{fcd}(M^{+,a}N^{+,b}N_cM_d).$$

Квадратичная часть L_{φ^2} соответствует обычным массовым членам, хотя последние, вообще говоря, выбираются здесь с «неправильными» знаками для обеспечения механизма Хиггса:

$$L_{\varphi^2}={}^1/_2m^2_\Phi\Phi^2+m^2_M(M^+M)+m^2_N(N^+N).$$

Заметим также, что L_{φ^4}- и L_{φ^2}-формы потенциала взаимодействия имеют симметрию более высокую, чем E_6. Этот факт легко проверяется простой алгеброй, например непосредственной заменой $M\to\exp(i\varphi_M)M$ и $N\to\exp(i\varphi_N)N$. Однако эта симметрия не имеет места в L_{φ^3}-форме, которая вводит в теорию взаимодействие скалярных полей трилинейного вида

$$L_{\varphi^3}=D_{ijk}\left[\frac{\rho^2_{M^3}}{3!}M_iM_jM_k+\frac{\rho^2_{MN^2}}{2}M_iN_jN_k+(M\leftrightarrow N)\right]+\text{h. c}+$$

$$+(\Phi\Gamma)^j_i(\rho^2_{\Phi M^2}M^{+i}M_j+\rho^2_{\Phi MN}M^{+i}N_j+(M\leftrightarrow N)).$$

Существование этого взаимодействия в L обеспечивает после спонтанного нарушения симметрии отсутствие нефизических скалярных безмассовых частиц, т. е. проблема «лишних голдстоунов» для данной модели, таким образом, легко решается. Представленная нами модель содержит в общей сложности 28 параметров, из которых 12 есть безразмерные заряды, а остальные 16 параметров имеют размерность массы. Естественно, не все эти параметры произвольны. Так, в частности все безразмерные заряды должны удовлетворять ряду соотношений, которые следуют из уравнений ренормгруппы, если иметь в виду решение этих уравнений, сохраняющее для данной модели асимптотическую свободу.

Уравнения ренормгруппы в «однопетлевом» приближении вычисляются нами согласно [17, 19] и имеют форму, достаточно простую для эффективного калибровочного заряда,

$$16\pi^2\dot{g}=-16g^3,$$

и несколько более сложную для других констант связи

$$16\pi^2\dot{\omega}_i^2=\sum_{j,k=0}^{11}C_{ijk}\omega_j^2\omega_k^2.$$

Все C_{ijk} представлены в [5].

Эта система уравнений исследовалась нами на классе решений следующего вида:

$$\omega_i(t)=\bar{\omega}_i\cdot g(t),$$

который в рамках данной модели обеспечивает доказательство асимптотической свободы, если соответствующие константы $\bar{\omega}_i$ будут найдены. Численный счет на ЭВМ подтвердил правильность этой гипотезы, фиксировав полный набор $\bar{\omega}_i$, с нужными свойствами:

$$\overline{k^2}=0{,}994253,\quad \overline{f^2}=1{,}379311,\quad \overline{h^2}=1{,}202299,$$

$$\overline{\lambda^2_{\Phi^4}}=0{,}526893,\quad \overline{\lambda^2_{\Phi^2M^2}}=0{,}021569,\quad \overline{\delta^2_{\Phi^2M^2}}=0{,}728620,$$

$$\overline{\lambda^2_{M^4}}=0{,}698427,\quad \overline{\delta^2_{M^4}}=0{,}353515,\quad \overline{\lambda^2_{M^2N^2}}=-0{,}111609,$$

$$\overline{\delta^2_{M^2N^2}}=-0{,}311164,\quad \overline{\gamma^2_{M^2N^2}}=0{,}341257.$$

Таким образом, решение уравнений ренормгруппы, удовлетворяющее всем необходимым требованиям, здесь найдено явно. Оно обеспечивает стабильную форму потенциала взаимодействия скалярных полей и асимптотическую свободу для всех безразмерных констант связи в теории с лагранжианом следующего вида:

$$L'=L_g+L_{\varphi^4}+L_{\psi\bar{\psi}\varphi}.$$

Однако так как свойство модели быть асимптотически-свободной не изменяется, после добавления произвольных членов к L' с зарядами, имеющими размерность массы [25], полная модель, представленная нами, останется асимптотически-свободной в той же мере. Последний факт доказан, вообще говоря, только в «однопетлевом» приближении, однако этого достаточно [26] для того, чтобы свойство модели быть асимптотически-свободной имело место и в более общем случае.

Теперь необходимо кратко обсудить проблему спонтанного нарушения симметрии в рамках данной модели [4)].

Здесь нами может быть представлена матричная система уравнений для вакуумных ожиданий от соответствующих скалярных полей, обладающая $SU(3)\times SU(3)$-симметрией. Последний факт дает возможность предложить некоторую удобную параметризацию этих уравнений и в конечном итоге найти ее решение в явном виде. Исходная симметрия модели здесь разрушается до $SU^c(3)\times U(1)$-уровня.

Бесцветная (по отношению подгруппы $SU^c(3)$ из E_6) часть скалярного 78-плета здесь представлена парой эрмитовых 3×3 бесследных матриц w_1 и w_2, а бесцветная часть скалярного 27-плета ($\overline{27}$-плета) как комплексная 3×3-матрица $v_1(v_2)$ общего вида. Система уравнений, определяющая эти матрицы (когда $L_\varphi=0$), имеет следующий вид:

$$\beta w_1+[w_1(v_1^+v_1+v_2^+v_2)+(v_1^+v_1+v_2^+v_2)w_1-$$

$$-2(v_1^+w_2v_1+v_2^+w_2v_2)]=\lambda\cdot I,$$

$$\alpha_1v_1+\varkappa(v_1v_1^+v_1)+\delta(v_1v_2^+v_2+v_2v_2^+v_1)+$$

$$+\tau\mathrm{Sp}(v_1v_2^+)v_2+[w_2^2v_1+v_1w_1^2-2w_2v_1w_1]=0,$$

$$\beta w_2+[w_2(v_1v_1^++v_2v_2^+)+(v_1v_1^++v_2v_2^+)w_2-$$

$$-2(v_1w_1v_1^++v_2w_1v_2^+)]=-\lambda\cdot I,$$

$$\alpha_2v_2+\varkappa(v_2v_2^+v_2)+\delta(v_2v_1^+v_1+v_1v_1^+v_2)+$$

$$+\tau\mathrm{Sp}(v_2v_1^+)v_1+[w_2^2v_2+v_2w_1^2-2w_2v_2w_1]=0,$$

4) В работе Калашникова и Конштейна [14] эта проблема обсуждается в деталях.

где $\varkappa$, δ, τ, λ — некоторые константы; α_1, α_2 и β — скалярные функции от v_i и w_i, содержащие соответственно $-m_M^2$, $-m_N^2$, $-m_\Phi^2$ аддитивным образом. Решение, реализующее минимум эффективного потенциала скалярного самодействия, в рамках этих уравнений нами найдено как следующее:

$$w_1 = w_2 = \begin{bmatrix} t & & \\ & t & \\ & & -2t \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} x & & \\ & y & \\ & & z \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} a & b & \\ b & d & \\ & & r \end{bmatrix},$$

где все параметры вещественны и ненулевые, t — произвольно, а остальные параметры подчиняются системе пяти уравнений.

Оказывается, что спонтанное нарушение симметрии такого вида способно обеспечить для данной модели необходимое число векторных полей требуемыми массами, а также представить параметр, обеспечивающий киральность слабых заряженных токов. После спонтанного нарушения симметрии здесь остаются безмассовыми девять векторных частиц: восемь глюонов и один фотон. Глюоны взаимодействуют с кварками, среди которых можно указать обычные легкие кварки трех цветов и шести «запахов» (12 из них имеют заряд $^1/_3$ и 6 имеют заряд $^2/_3$) и аналогичный набор более тяжелых кварков (остальные кварки супертяжелые). Бесцветными являются: восемь сверхтяжелых лептонов, девять тяжелых и девять сравнительно легких лептонов. Последние составляют набор четырех заряженных частиц, наиболее легкие из которых могут быть отождествлены с электроном и μ-мезоном, и пяти нейтральных частиц, одна из которых безмассовая и может быть отождествлена с ν_e, другая имеет массу, обратно пропорциональную в некотором масштабе большой массе частиц спинорного 78-плета, и может быть идентифицирована с ν_μ.

Для лучшего соответствия полученных величин масс и токов с экспериментальными данными можно также учесть добавочный потенциал L_{φ^3} с кубическим взаимодействием скалярных полей.

5. Заключение

Здесь мы ставили своей целью продемонстрировать потенциальные возможности применения октав и исключительных групп для квантовой теории поля. Представлены различные направления такой деятельности и сделан краткий обзор полученных результатов. Так, в частности, показано, что лоренцевские степени свободы подобно изоспиновым можно описывать также с помощью октав, что дало возможность предложить единообразную октавную форму записи основных уравнений теории поля Максвелла, Дирака и уравнения антидуальности для полей Янга — Миллса. В последнем случае простой алгеброй непосредственно в терминах октав получено $5N$-параметрическое семейство инстантонных решений.

Весьма актуально сейчас также использование исключительных групп, как калибровочных, для построения на их основе единых моделей слабого, электромагнитного и сильного взаимодействия. Для этой цели, по нашему мнению, здесь наиболее приспособленной является E_6-группа как единственная среди исключительных групп, имеющая комплексные представления. Нами представлено математическое обеспечение этой группы и сформулирована E_6-инвариантная модель единого взаимодействия, обладающая асимптотической свободой. Требуемая иерархия калибровочных взаимодействий и необходимое значение масс для векторных и спинорных полей в рамках этой модели получено за счет спонтанного нарушения симметрии при помощи механизма Хиггса. Показано, что последний в состоянии обеспечить наблюдаемую феноменологию физики низких энергий, несмотря на ряд ограничений в отборе скалярных мультиплетов, следующих из требования сохранения асимптотической свободы.

Другие возможности применения исключительных групп, как калибровочных, для построения единых моделей слабого, электромагнитного и сильного взаимодействия нами здесь не исследовались. Однако такие модели известны, в частности модель единого взаимодействия, использующая E_7-группу. Следует также заметить, что до некоторой степени выделенной является здесь E_8-группа, в которой основное и присоединенное представления совпадают. Не исключено, что этот факт может быть весьма полезен при более детальных исследованиях в рамках будущей теории.

Литература

[1] H. Goldstine, L. P. Horwitz. Proc. Nat. Acad. Sci., 48, 1134, 1962. M. Günaydin, C. Piron, H. Ruegy. Commun. math. Phys., 61, 69, 1978.
[2] R. Casalbuoni, C. Domokos, S. Kövesi-Domokos. Nuovo Cim., **31A**, 423, 1976.
[3] F. Gürsey, P. Ramond, P. Sikivie. Phys. Lett., **60B**, 177, 1976.
[4] F. Gürsey, P. Sikivie. Phys. Rev. Lett., 36, 775, 1976.
[5] E. S. Fradkin, O. K. Kalashnikov, S. E. Konstein. Lett. Nuovo Cim., **21**, 5, 1978.
[6] S. Okubo. Univ. Rochester Report, UR-628, 1977.
[7] А. И. Мальцев. Изв. АН СССР, серия мат., 8, 775, 1967. T. Tits. Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
[8] H. Fritzsch. In Colour Symmetry and Cabur Confinement, v. III, ed. by T. Tran-Thanh Va (Frontieres, France, 1977).
[9] С. Е. Конштейн. Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 1, 12, 1978.
[10] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, Yu. Tyupkin. Phys. Lett., **59B**, 85, 1975.
[11] E. Cartan. Ann. Ecole Norm., 31, 263, 1914.
[12] C. Chevalley, R. D. Schafer. Proc. Nat. Acad. Sci., **36**, 137, 1950. H. Freudenthal. Octaven. Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Nath. Inst. der Rijksuniversiteit te Utrecht, 1951. N. Jacobson. Exceptional Lie Algebra, M. Dekker, N. Y., 1971.
[13] С. Е. Конштейн. Препринт ФИАН СССР, № 103, 1977.
[14] O. K. Kalashnikov, S. E. Konstein. Nucl. Phys., to be published, 1979.
[15] D. G. Gross, F. W. Wilszek. Phys. Rev. Lett., **30**, 1343, 1973. H. D. Politzer. Phys. Rev. Lett., **30**, 1346, 1973.
[16] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, **102**, 489, 1955. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 28, 750, 1955.
[17] T. Cheng, E. Eichten, L.-P. Li. Phys. Rev., **D9**, 2259, 1974.
[18] T.-P. Chang. Phys. Rev., **D*10***, 2706, 1974. E. C. Fradkin, O. K. Kalashnikov. J. Phys., **A8**, 1814, 1975.
[19] Б. Л. Воронов, Т. В. Тютин. ЯФ, **23**, 664, 1976.
[20] E. Gildener. Phys. Rev., **D14**, 1667, 1976.
[21] O. K. Kalashnikov, V. V. Klimov. Phys. Lett., **80B**, 75, 1978.
[22] O. K. Kalashnikov. In Proc. of the Third Shool of Elementary Particles and High Energy Physics, Primorsko, Bulgaria, October 1977 (published in Moscov Lebedev-77-206 and Sofia 1978).
[23] V. Ogievetsky, V. Tzeitlin, Preprint E2-11136, JINR, Dubna, 1978.
[24] F. Gürsey, Serdaroglu. Lett. Nuovo Cim., **21**, 28, 1978.
[25] J. C. Collins. Nucl. Phys., **B80**, 431, 1974. Б. Л. Воронов, И. В. Тютин. Письма в ЖЭТФ, **21**, 369, 1975.
[26] И. В. Тютин. Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 8, 1978.

OCTONIONS AND EXCEPTIONAL GROUPS IN FIELD THEORY

O. K. KALASHNIKOV, S. E. KONSTEIN, E. S. FRADKIN

It is shown that the octaves may be essential in the present field theory and that Lorentz as well as intrinsic degrees of freedom can be adequately described in terms of octaves. The basic equations of the field theory (Dirac and Maxwell equations and anti-duality equations for Yang-Mills fields) are as well written in terms of octaves. It is shown (using as an example the instantons for Yang-Mills gauge fields) that solution of the above equations can be expressed through octaves. An asymptotically free E_6 model of the unified (strong, weak and electromagnetic) interaction is presented. Arguments are given supporting the use of exceptional groups as gauge groups.
