



# Регулярность и хаос в звёздной динамике

Е.Васильев

Астрофизический семинар ОТФ 12.11.2008

# Регулярность и хаос в звёздной динамике

- Несферические звёздные системы, интегрируемость
- Типы орбит в трёхосных потенциалах
- Резонансные орбиты
- Методы анализа регулярности орбит:
  - сечения Пуанкаре
  - фундаментальные частоты
- Влияние центральной концентрации массы на устойчивость орбит
- Построение самосогласованных конфигураций методом Шварцшильда

# Задача о построении самосогласованной модели звёздной системы

из наблюдений  
(в проекции!)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{r}) \\ \Phi(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \iff f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \stackrel{?}{\iff} f(I, \theta)$$

Дополн.:  $\sigma^2(\mathbf{r})$

неоднозначно!

только для  
интегрируемых  
систем

Пример: для сферически-симметричных изотропных систем  
(формула инверсии Эддингтона)

$$E = \Phi(|\mathbf{r}|) + \frac{1}{2}v^2 ; \quad f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(E) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2} \frac{d}{dE} \int_0^E \frac{d\rho}{d\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{E - \Phi}}$$

## Примеры трёхосных распределений плотности

$$m^2 = (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \quad \text{– эллиптический радиус}$$

$(a \geq b \geq c)$

$$\rho(m) = \frac{\rho_0}{(1 + m^2)^2}$$

«Perfect ellipsoid»  
(трёхосный интегрируемый потенциал Штеккеля)

$$\rho(m) = C m^{-\gamma} (1 + m)^{-(4-\gamma)}$$

Dehnen's law  
(сингулярен,  $0 < \gamma \leq 2$ )

$$\Phi(m) = C \ln(1 + m^2)$$

Логарифмический потенциал

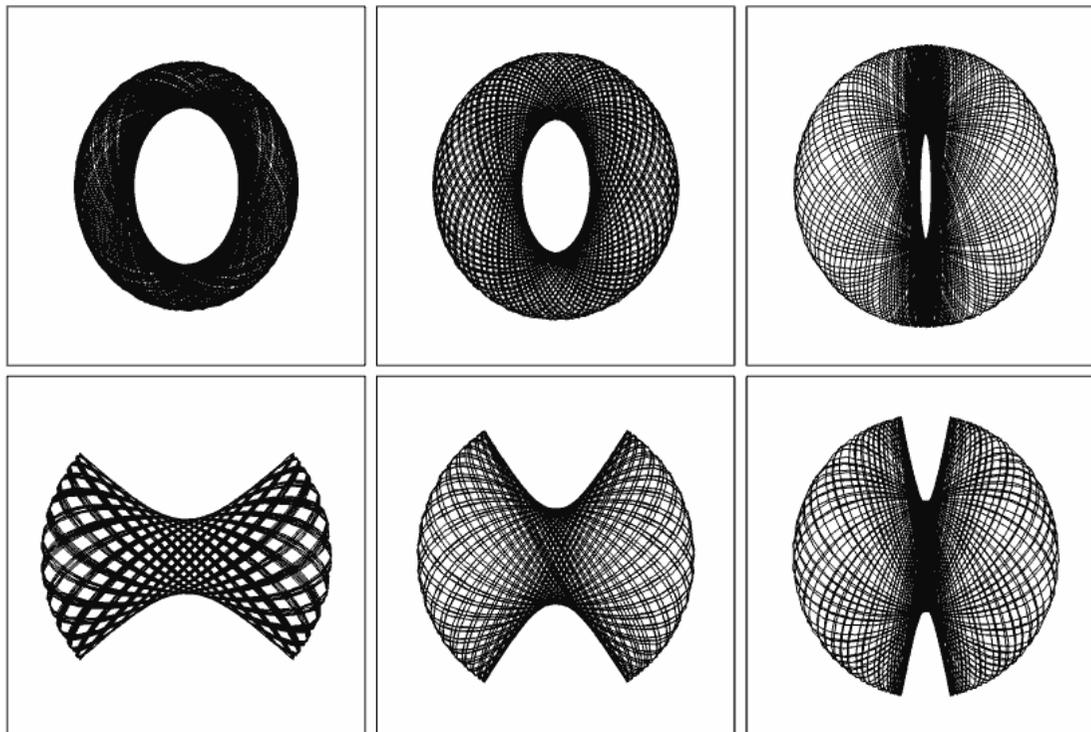
кроме того:

в центре галактики может находиться чёрная дыра  
(область ньютоновского потенциала)

# Пример: двумерный неосесимметричный потенциал

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}v_0^2 \ln(1 + m^2), \quad m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a \geq b$$

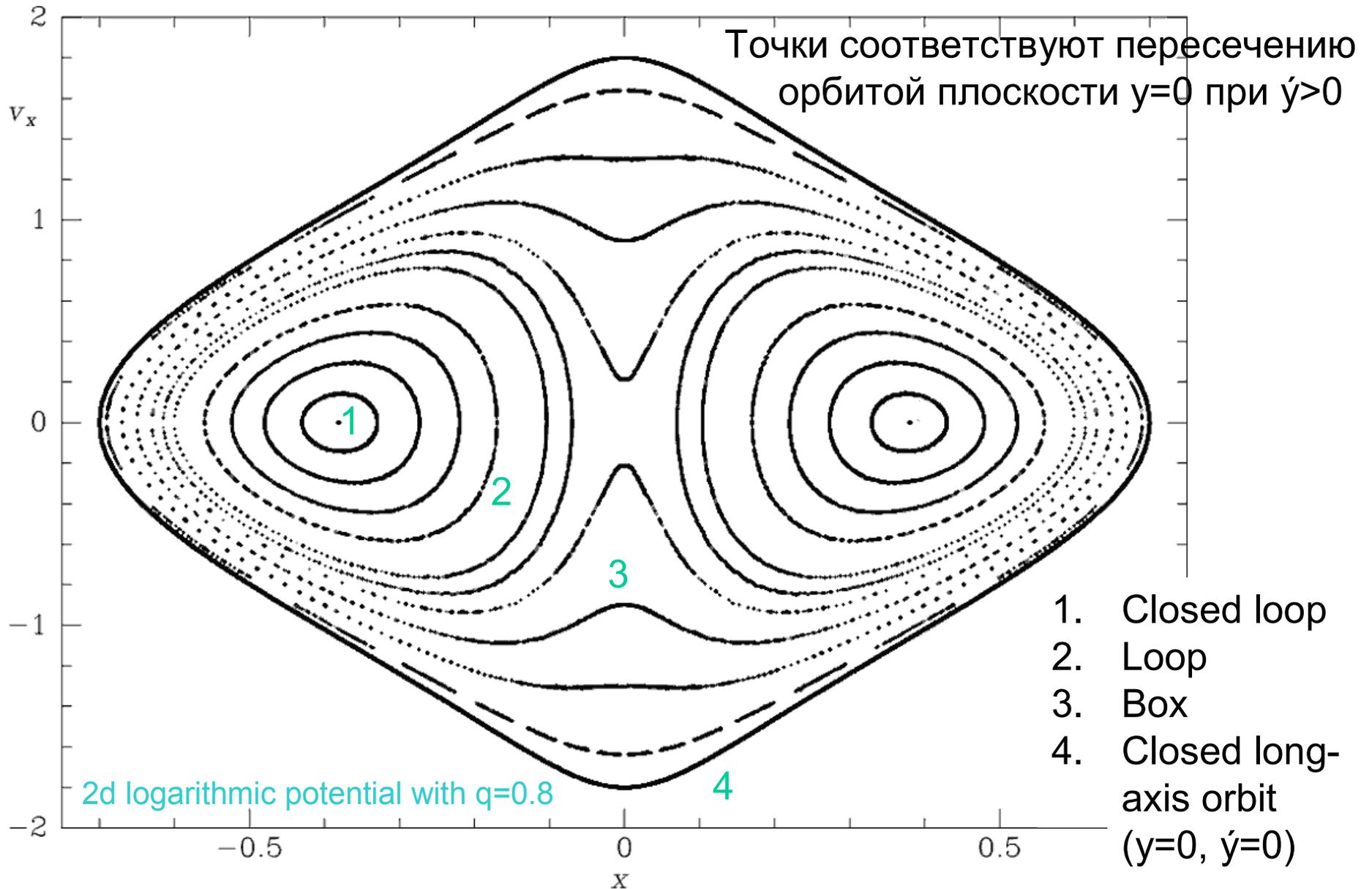
При  $m \ll 1$  – двумерный осциллятор:  $\Phi = \left(\frac{v_0^2}{2} \frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{v_0^2}{2} \frac{y^2}{b^2}\right)$



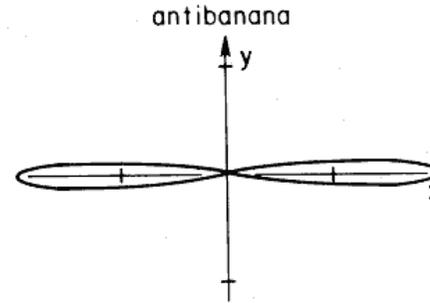
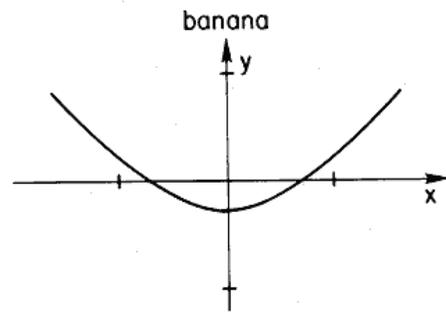
loop orbits

box orbits

# Сечения Пуанкаре для двумерного движения

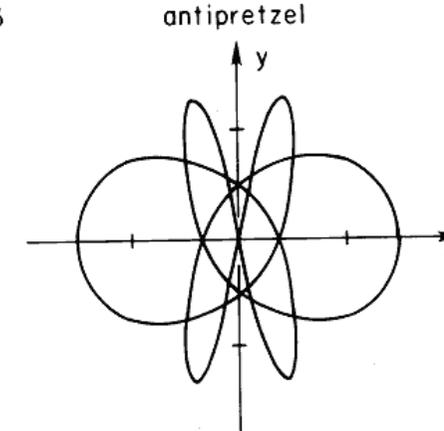
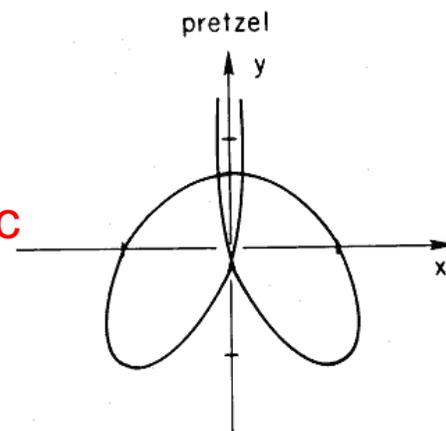
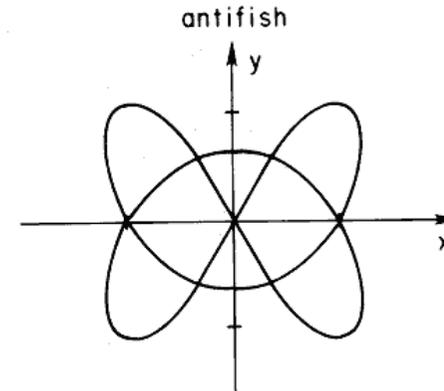
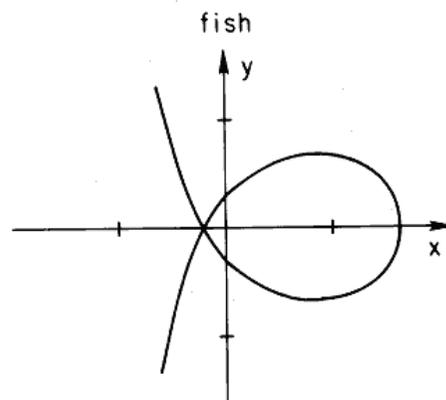


# Резонансные орбиты в двумерном потенциале



box orbits  $\Rightarrow$  «boxlets»

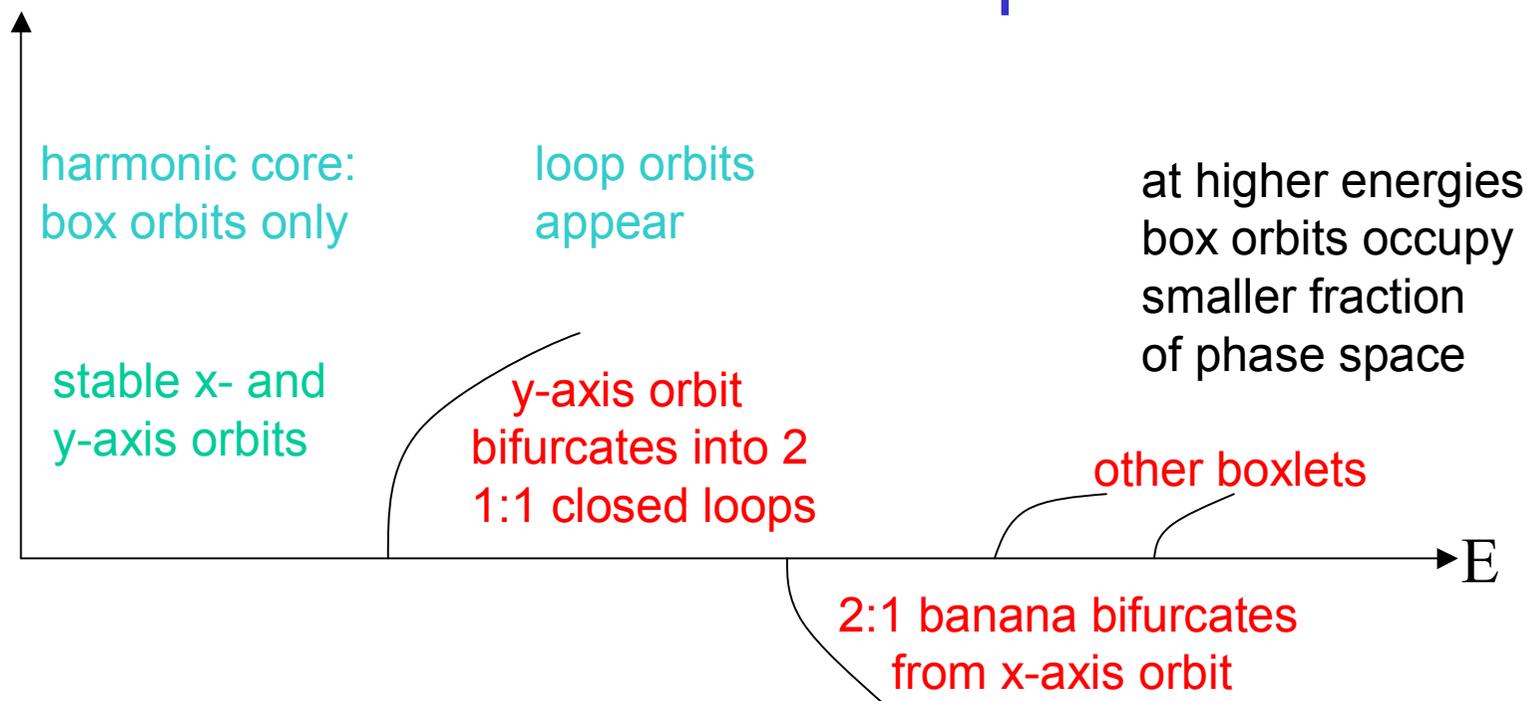
(Miralda-Escude & Schwarzschild 1989)



centrophobic  
(stable)

centrophilic  
(unstable)

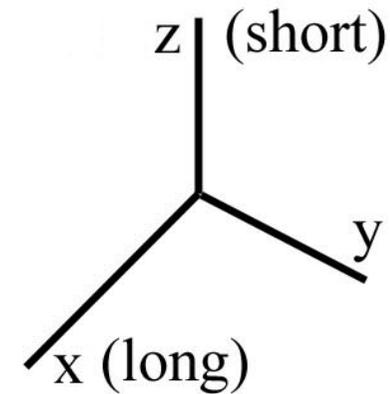
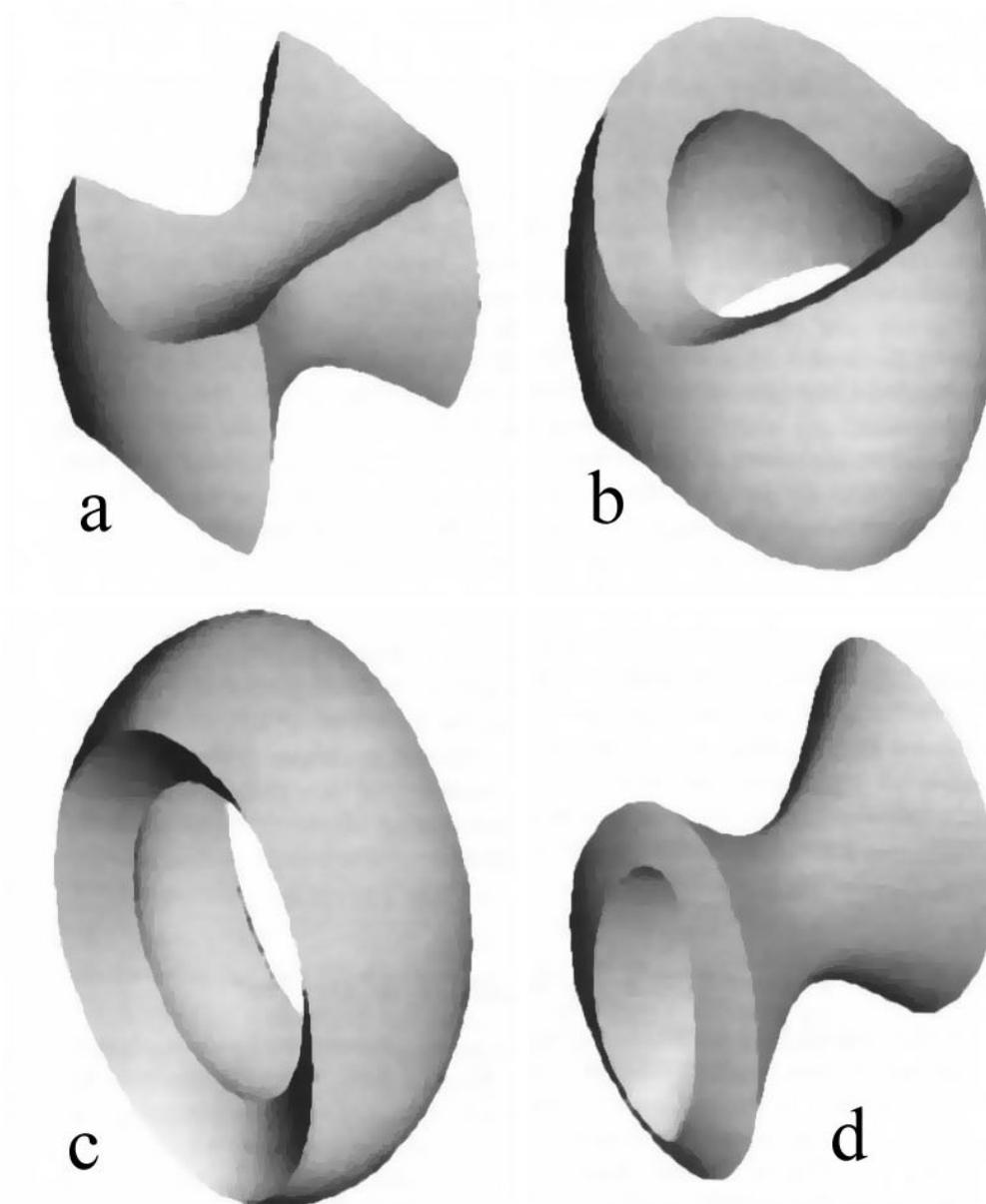
# Резонансные орбиты как «прародители» семейств орбит



бифуркации происходят, когда частота движения по одной из координат становится соизмеримой с частотой возмущения по другой.

устойчивые резонансные орбиты порождают ассоциированные семейства орбит.

# Типы орбит в трёхосном Perfect Ellipsoid



регулярные орбиты:

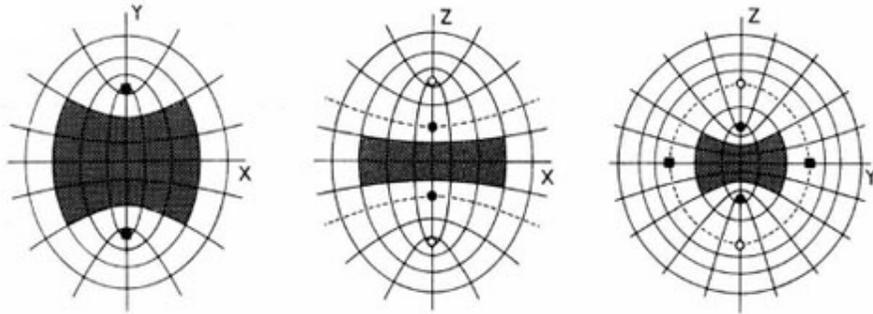
a: box orbits

b: short-axis tubes

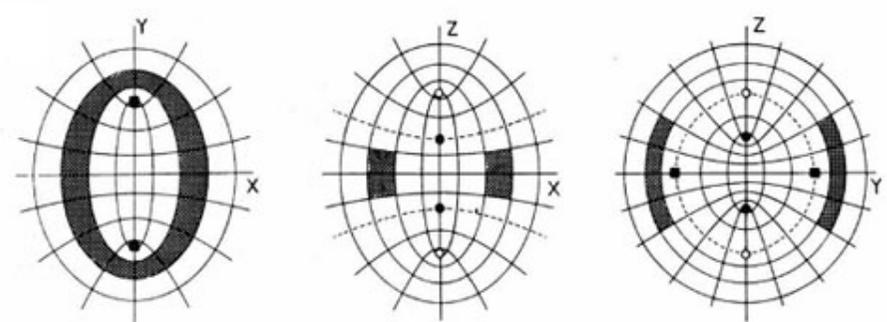
c: outer long-axis tubes

d: inner long-axis tubes

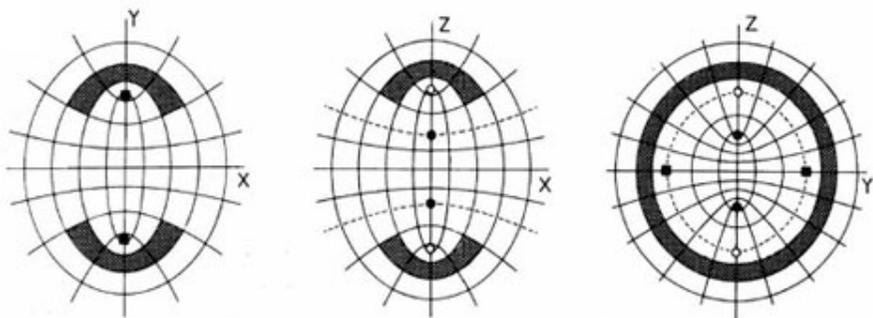
# Типы орбит в трёхосном Perfect Ellipsoid



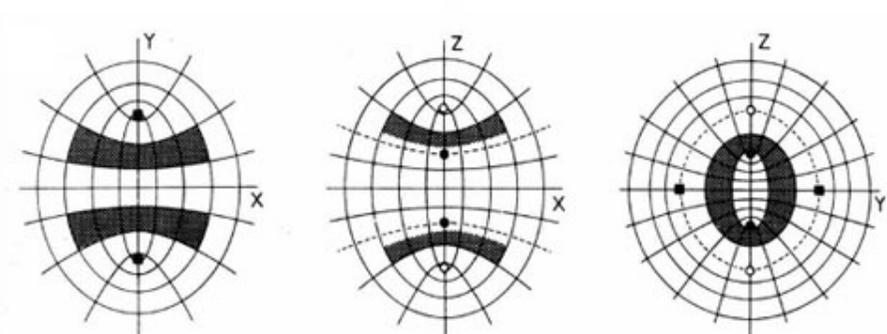
a) box



b) short-axis tubes



c) outer long-axis tubes



d) inner long-axis tubes

# Резонансные орбиты в трёхосных системах

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – фундаментальные частоты регулярной орбиты

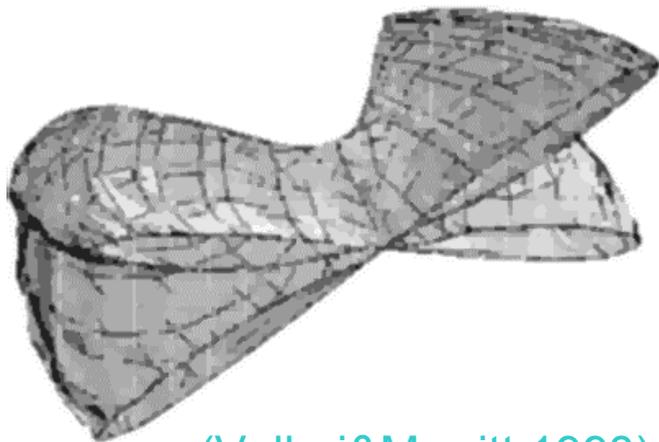
Резонанс:  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3 = 0$ . (thin orbit)

«Сильно нерезонансная» орбита:  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \gg |\mathbf{n}|^{-(N+1)}$  ( $N = 3$ ).

Замкнутая орбита: все  $\omega_i$  соизмеримы ( $\omega_i = n_i\omega_0$ ). (boxlet / tubelet)

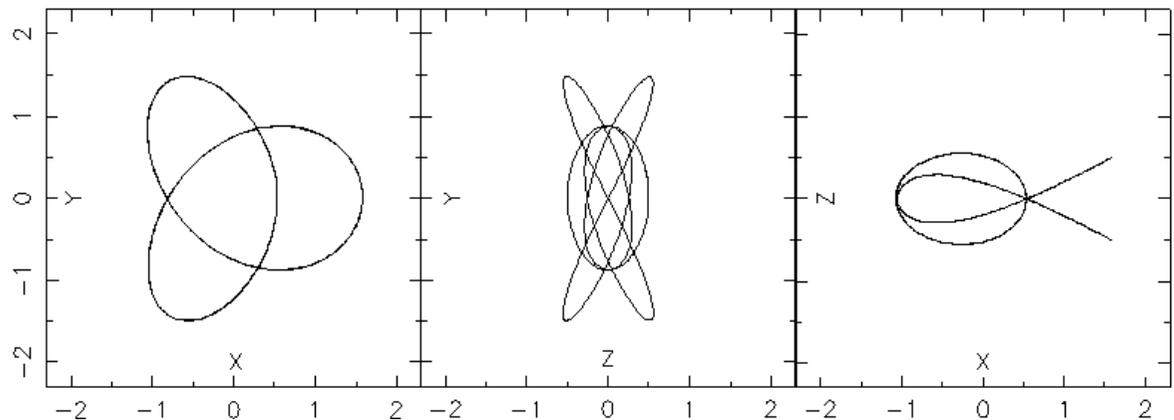
Резонансные орбиты структурируют фазовое пространство.

типичная резонансная орбита (thin box)



(Valluri&Merritt 1998)

проекции резонансной 4:5:6 boxlet орбиты



# Методы анализа стохастичности орбит

- Ляпуновские показатели:  $\sigma(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{d(\mathbf{x}_0, t)}{d(\mathbf{x}_0, 0)}$   
(работают только в приближении малых отклонений  $d$ )

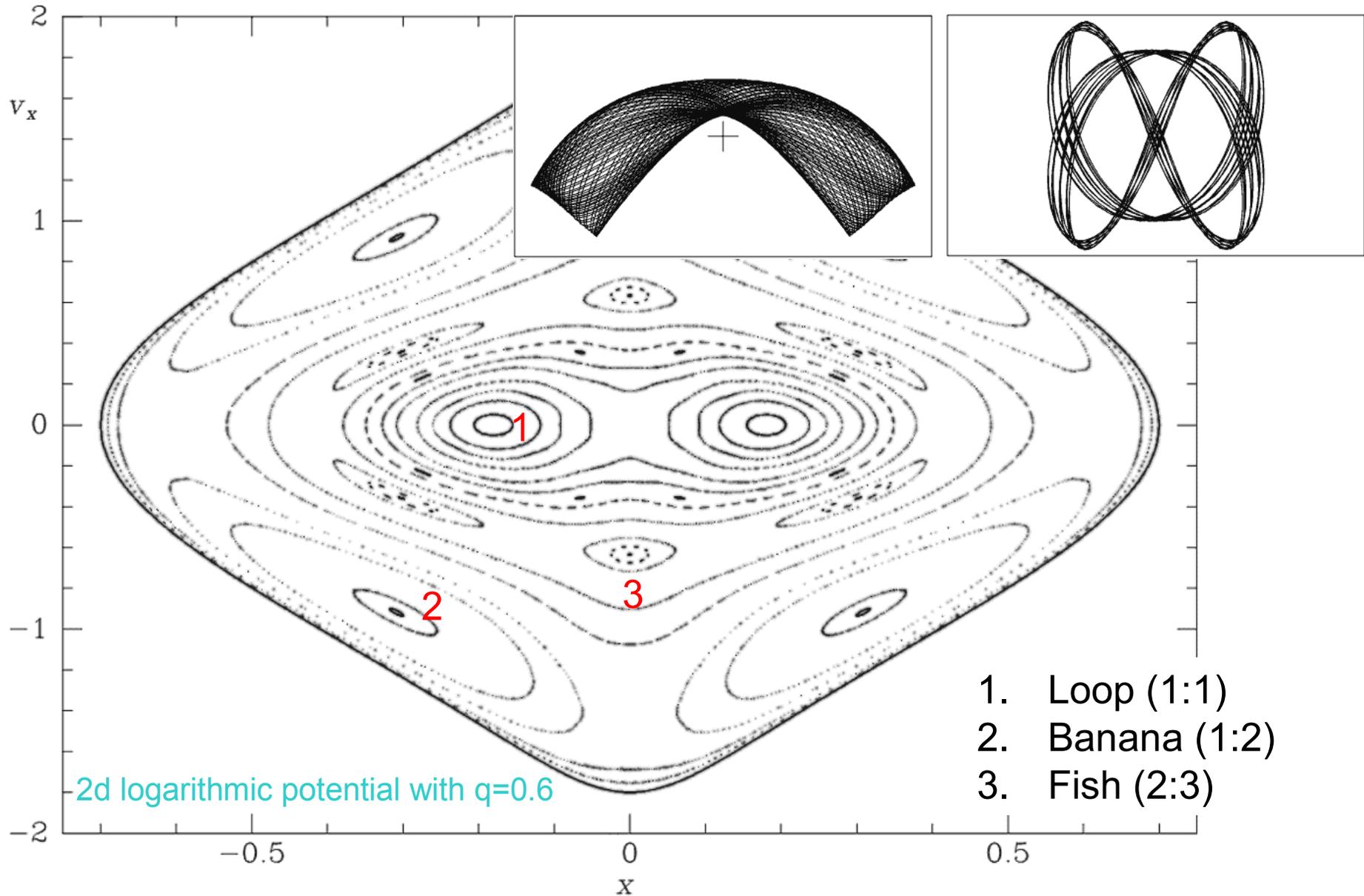
- Анализ сечений Пуанкаре  
(удобно для двумерных систем)

- Анализ диффузии фундаментальных частот  
(Laskar 1993, Hunter 2002)

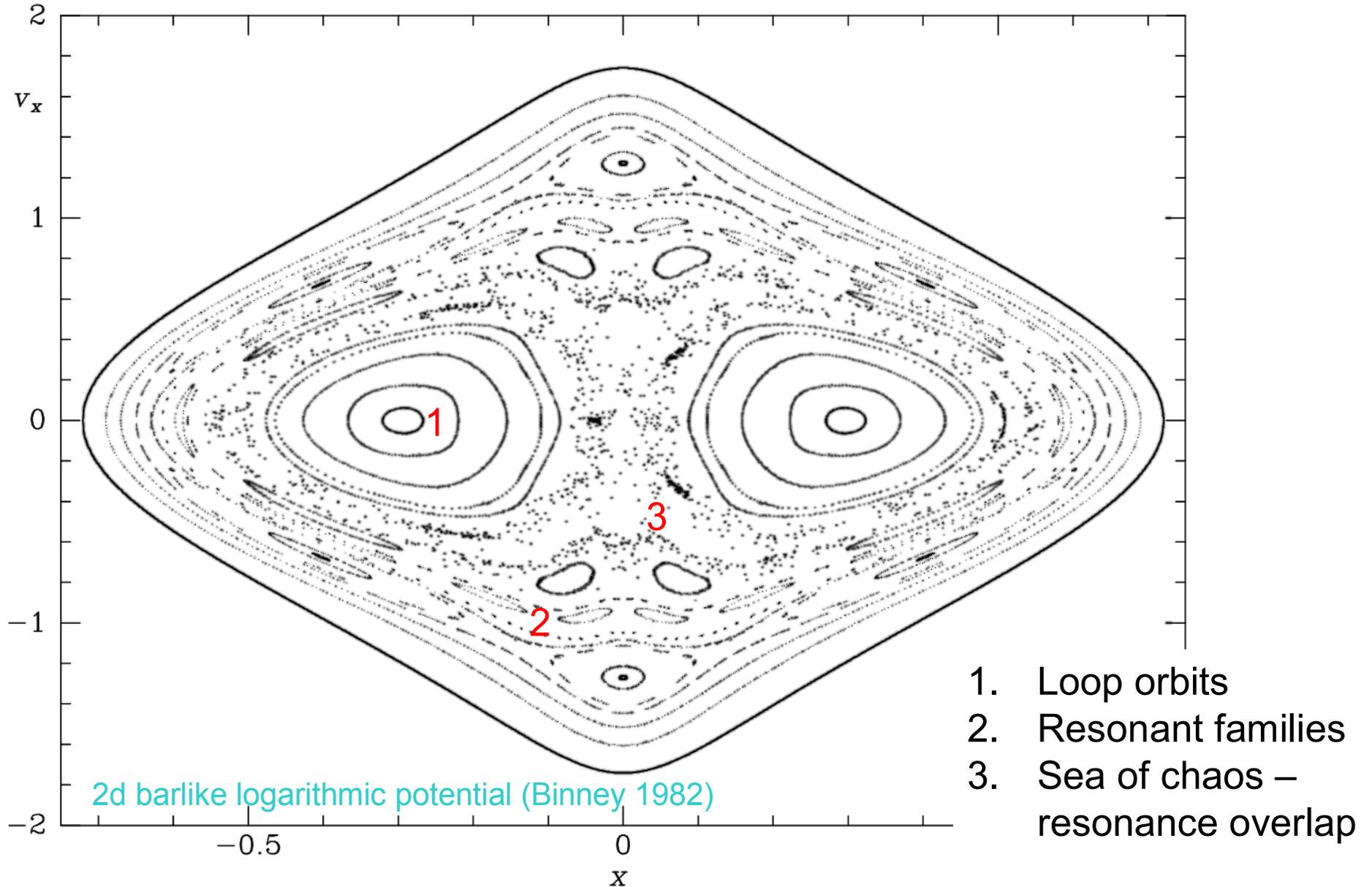
- Smallest alignment index (Skokos 2001):

$$SALI(t) = \min \left\{ \left\| \frac{\mathbf{w}_1(t)}{\|\mathbf{w}_1(t)\|} + \frac{\mathbf{w}_2(t)}{\|\mathbf{w}_2(t)\|} \right\|, \left\| \frac{\mathbf{w}_1(t)}{\|\mathbf{w}_1(t)\|} - \frac{\mathbf{w}_2(t)}{\|\mathbf{w}_2(t)\|} \right\| \right\}$$

# Сечения Пуанкаре для двумерного движения



# Сечения Пуанкаре для двумерного движения



# Анализ фундаментальных частот

Регулярная орбита обладает тремя фундаментальными частотами  $\omega_k$

⇒ пространственные координаты 
$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{X}_k \exp(i\omega_k t)$$

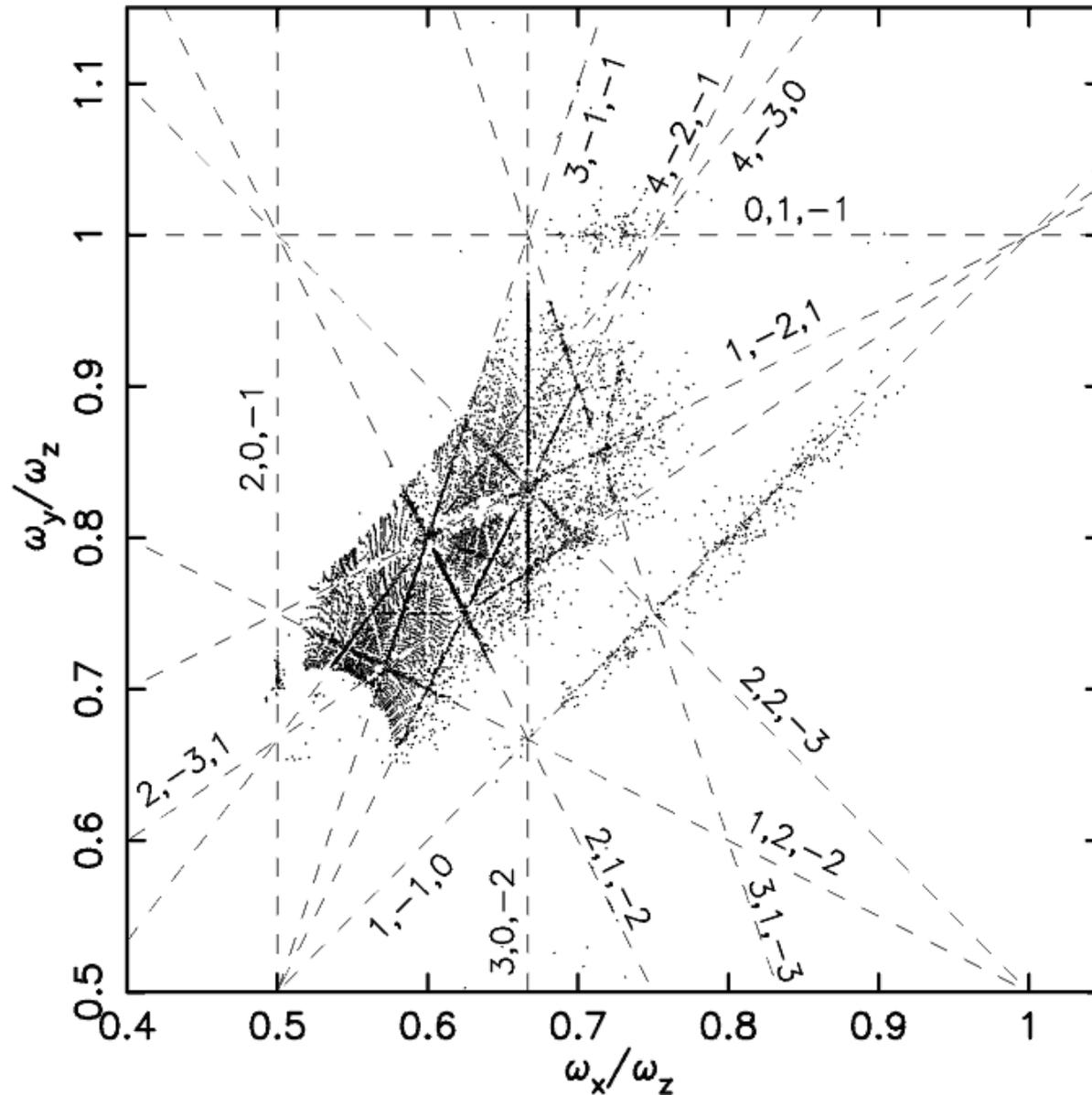
Раскладывая координаты для произвольной орбиты в ряд Фурье, находим ф.частоты  $\omega_k$ , которые могут меняться в зависимости от периода интегрирования, если орбита не регулярна.

$\Delta\omega_k/\omega_k$  называется скоростью диффузии частот

отношения частот  $\omega_2/\omega_1$  и  $\omega_3/\omega_1$  дают точку на графике «Frequency map»

(Laskar 1990, 93)

# Frequency map для трёхосного Dehnen's law

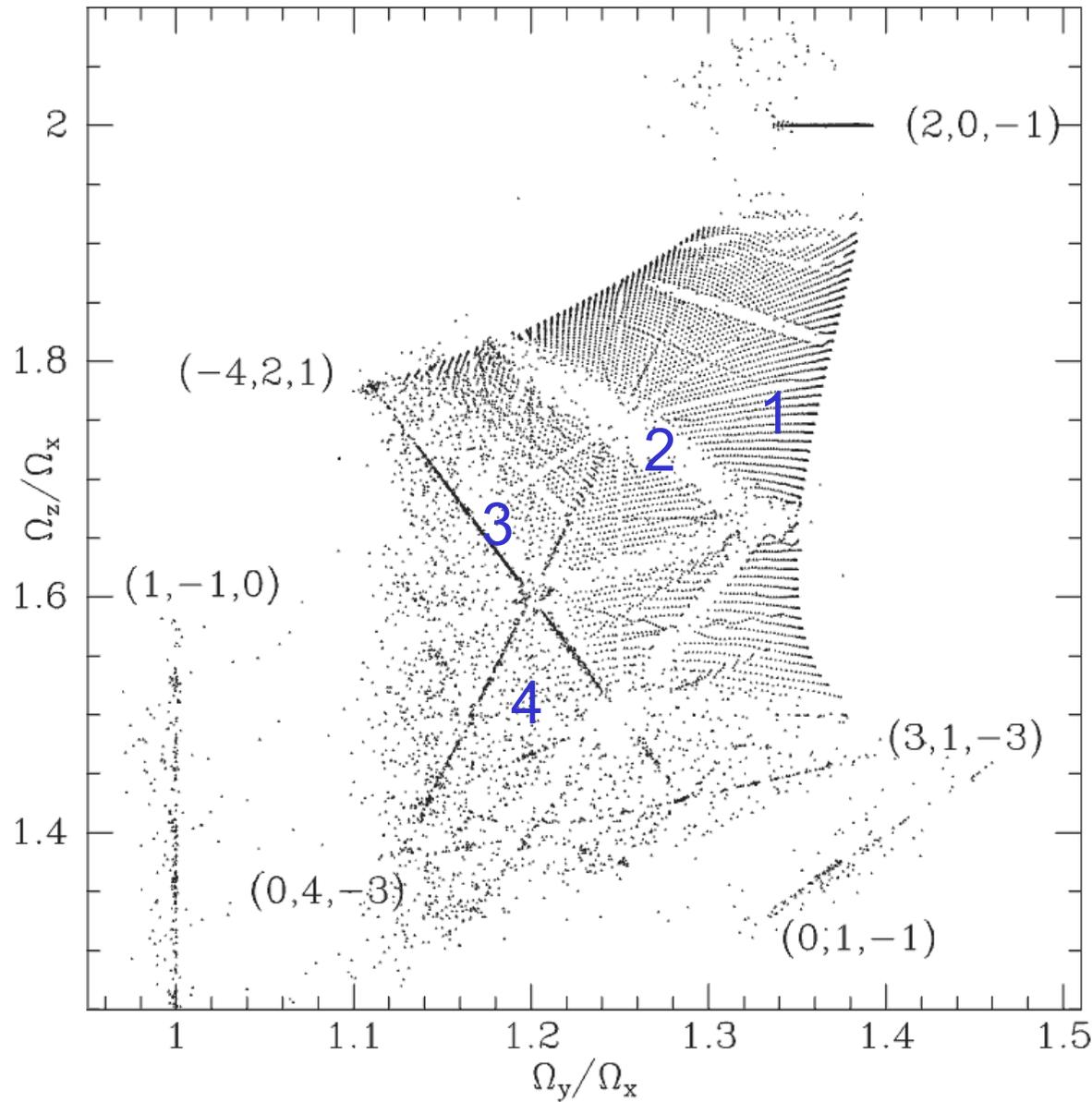


линии – резонансные  
орбиты (thin boxes)

пересечения линий –  
замкнутые орбиты  
(boxlets)

(Valluri&Merritt 1998)

# Frequency map для трёхосного cored logarithm



Интегрирование набора орбит на регулярной сетке начальных условий

1. регулярная область
2. неустойчивый резонанс
3. устойчивый резонанс
4. хаотическая область

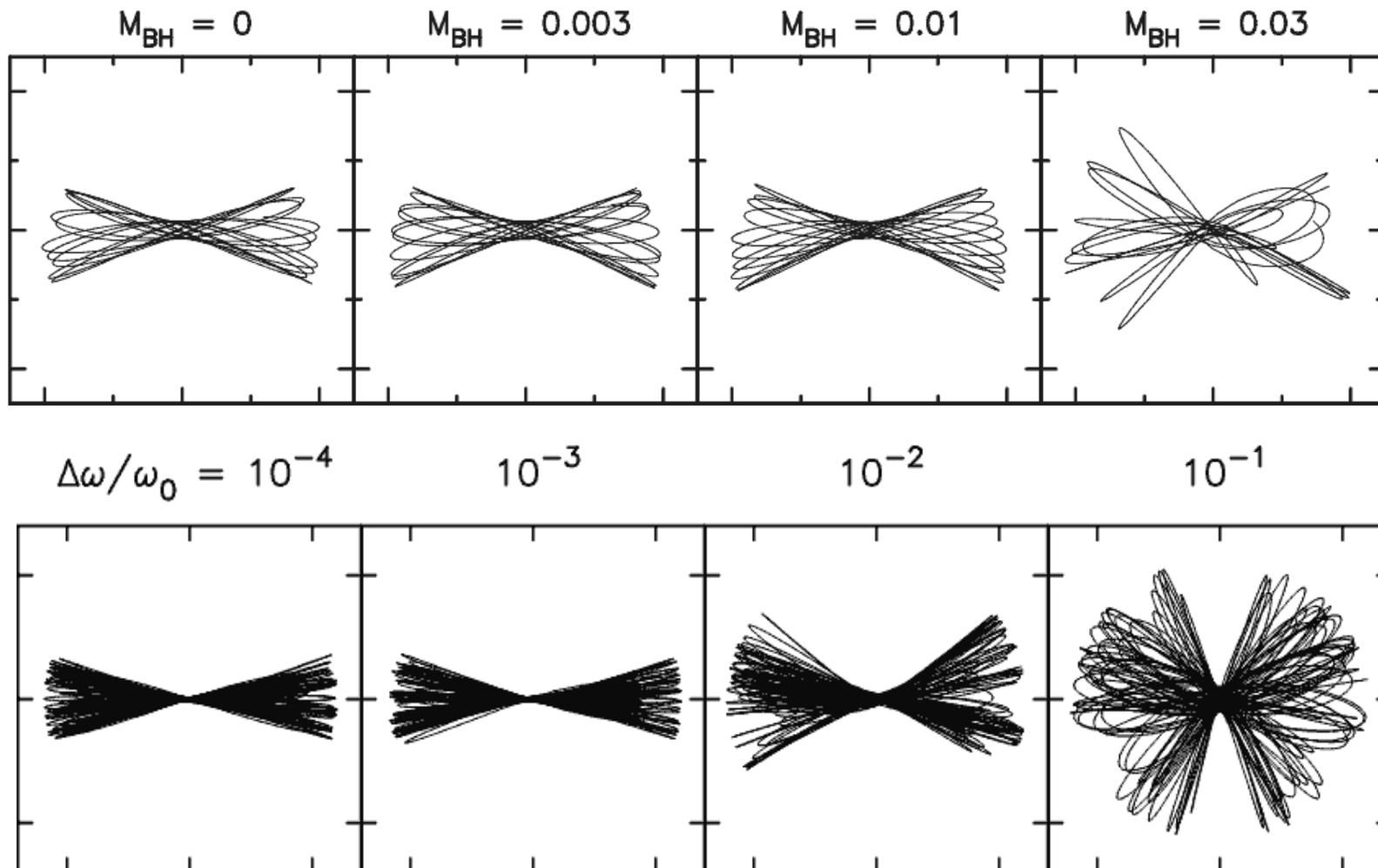
# Влияние центральной концентрации массы на устойчивость орбит

- Сингулярный профиль плотности ( $\rho \propto m^{-\gamma}$ )
- Наличие чёрной дыры (области ньютоновского потенциала)

## Основные закономерности:

- Рассеяние центрофильных орбит приводит к их стохастичности (справедливо для «простых» box orbits)
- при увеличении параметра возмущения (крутизны потенциала  $\gamma$  или массы чёрной дыры) растёт доля орбит, захваченных у стабильных резонансов, а затем – у замкнутых орбит (boxlets)

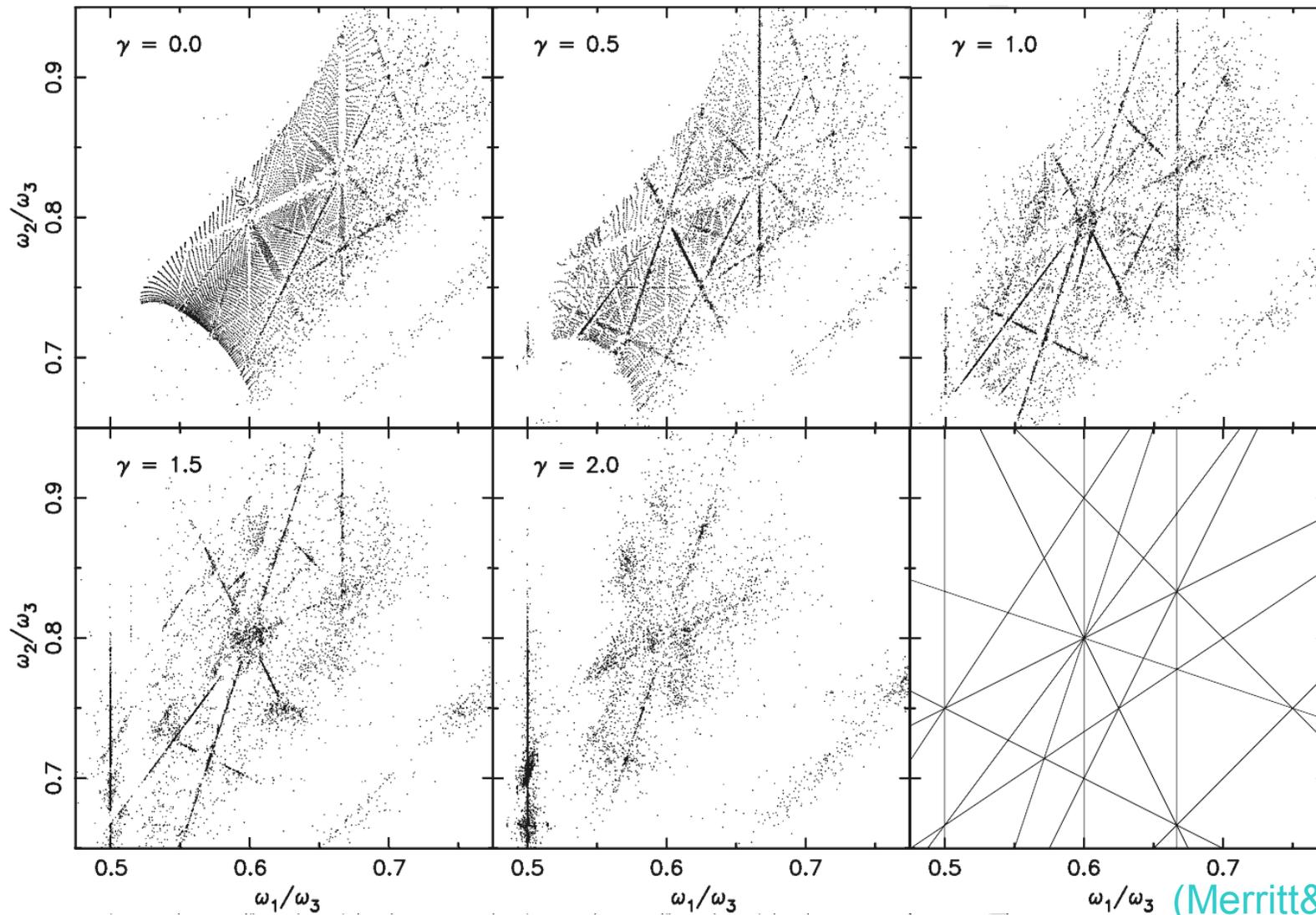
# Влияние центральной концентрации массы на устойчивость орбит



разрушение регулярности box-орбит (Merritt&Valluri 1998)

# Frequency maps of box orbits для различных показателей степени $\gamma$

$$(\rho \propto m^{-\gamma})$$



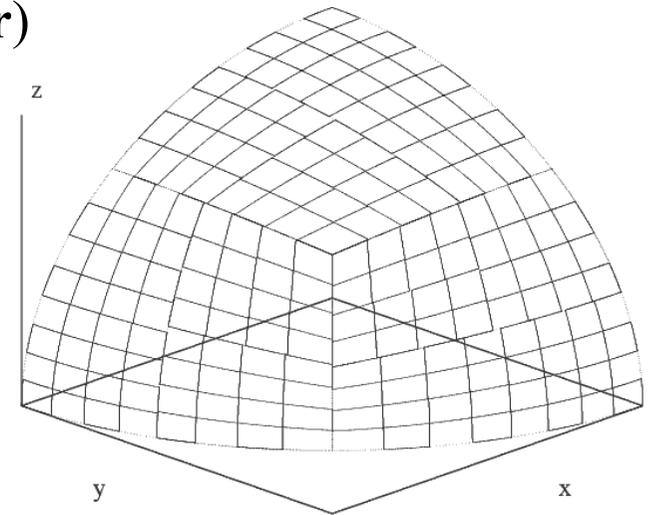
(Merritt&Valluri 1998)

# Метод Шварцшильда (Orbit superposition)

(M.Schwarzschild, 1979 ...)

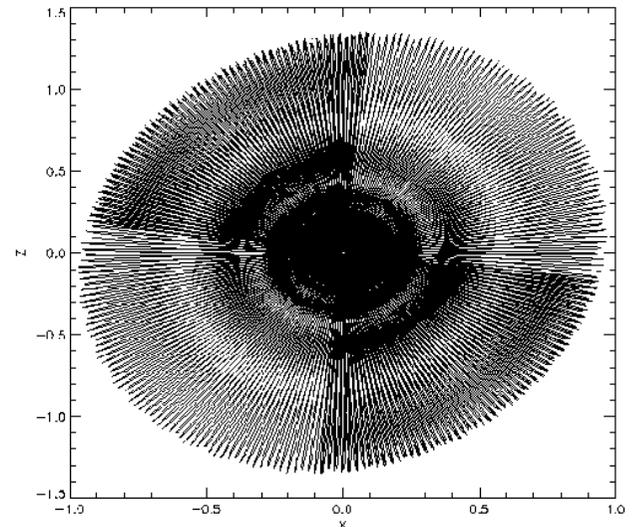
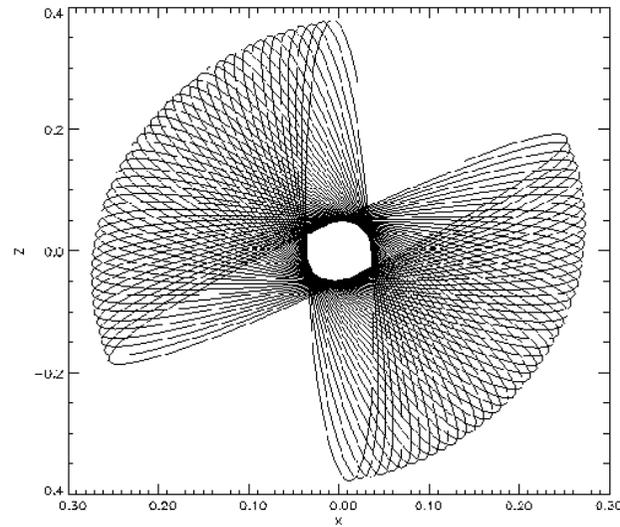
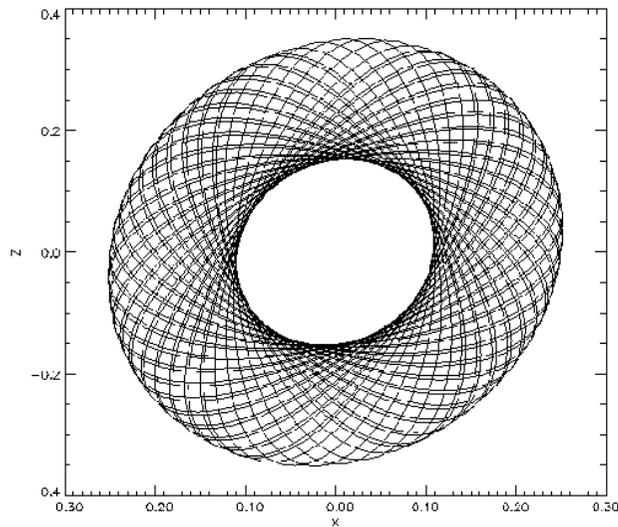
- Нужно построить самосогласованную модель с заданным профилем плотности  $\rho(\mathbf{r})$  / потенциалом  $\Psi(\mathbf{r})$
- Пространство разбивается на дискретные элементы объёма  $V_c$ ,  $c=1..N_c$  с массой  $m_c$
- Строится библиотека орбит (числом  $N_o$ ) в заданном потенциале
- Рассчитывается время  $t_{oc}$ , которое частица на  $o$ -й орбите проводит в  $c$ -й ячейке
- Решается задача: подобрать веса орбит  $w_o \geq 0$  так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{N_o} w_o t_{oc} = m_c \quad c = 1..N_c$$



# Концептуальные сложности метода

- Необходимо обеспечить равномерное заполнение доступного фазового объёма для каждой орбиты



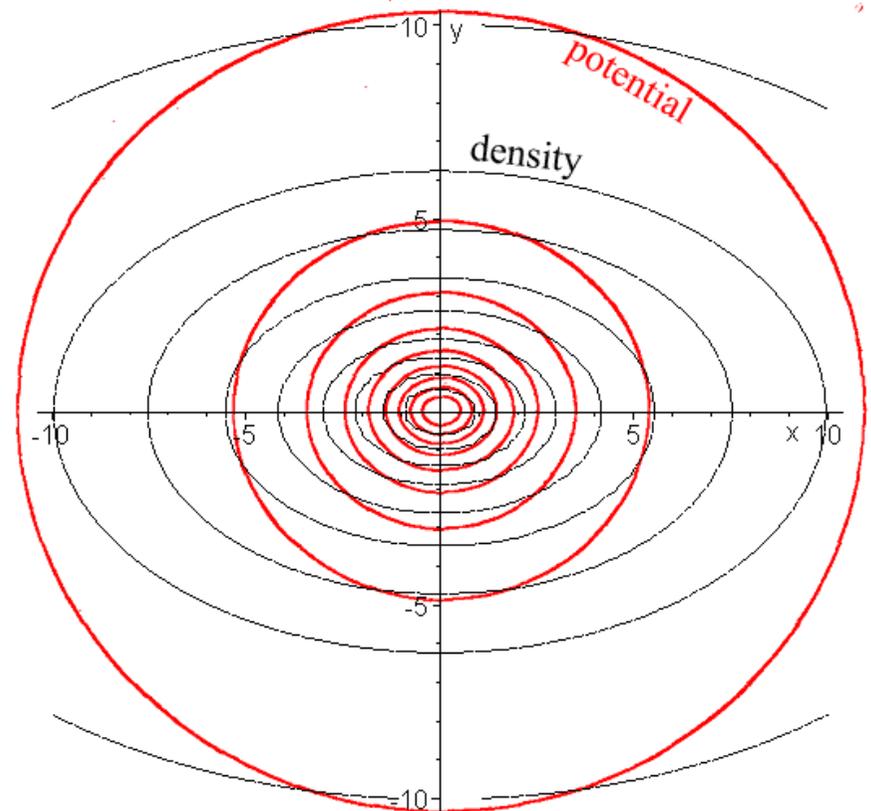
- Необходимо уметь различать регулярные и хаотические орбиты:
- все хаотические орбиты с одной энергией надо объединять в одну
- решение получается неоднозначным (т.к.  $N_c < N_o$ )
- Нет гарантии устойчивости звёздной системы

# Учёт хаотических орбит

- Для несингулярных профилей плотности обычно можно обойтись только регулярными орбитами (Schwarzschild 1982, etc.)
- В случае сингулярного профиля плотности ( $\rho \propto m^{-\gamma}$ ) успех зависит от степени вытянутости  $c/a$  и параметра трёхосности  $T = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$
- Для сильно несферических систем можно построить решение, если использовать слабо хаотические орбиты наравне с регулярными. Однако оно будет нестационарным.
- Если все хаотические орбиты с равной энергией объединить в одну «суперорбиту», то самосогласованность модели недостижима для слишком вытянутых, сильно несимметричных ( $T \sim 0.5$ ) или сильно сингулярных ( $\gamma \sim 2$ ) систем.  
(Merritt&Fridman 1996, Siopis 1999, Tersic 2003)
- При наличии центральной чёрной дыры решение существует только для не слишком вытянутых систем, и оно не полностью стационарно. (Valluri&Merritt 1998, Poon&Merritt 2003)

# «Бесполезность» хаотических орбит для наполнения трёхосных систем

- Хаотические орбиты стремятся заполнить всю область  $\Psi(r) < E$
- форма потенциала более «круглая», чем профиль плотности
- в самосогласованном решении полностью перемешанной орбите будет присвоен небольшой вес
- возможность существования стационарного самосогласованного решения слабо зависит от включения в него такой орбиты



# Астрофизические приложения

## 1. Сосуществование чёрных дыр и трёхосных галактик

- наличие чёрной дыры дестабилизирует вих-орбиты, необходимые для поддержания трёхосной формы профиля
- но вместо них появляются резонансные семейства орбит
- вблизи чёрной дыры движение регулярно, а на  $r > r_{\text{bh}} = GM_{\text{bh}}/\sigma^2$  – хаотично; наблюдается медленная эволюция профиля к осесимметричному

## 2. Темп разрушения чёрной дырой звёзд на вих-орбитах

- в трёхосных галактиках темп захвата чёрной дырой звёзд на центрофильных орбитах м.б. на порядки больше типичного значения для полного конуса потерь в сферическом случае

(Merritt&Poon 2003, Holley-Bockelmann&Sigurdsson 2006)

# Возможность обобщения метода Шварцшильда для нестационарных систем?

## Итерационная схема

- 
- Расчёт орбит в заданном потенциале и определение их хаотичности
  - Построение самосогласованной конфигурации
  - Учёт «диффузии» стохастических орбит в фазовом пространстве
  - Расчёт нового потенциала и адиабатическое изменение параметров регулярных орбит

## Сложности

- Влияние резонансных орбит на топологию фазового пространства: близкие к ним орбиты могут переходить из регулярных в стохастические при малом изменении потенциала
- Несохранение энергии в зависящем от времени потенциале
- Влияние дискретного шума на скорость диффузии орбит

## Заключение

- В динамике трёхосных звёздных систем важную роль играют стохастические орбиты
- Структура фазового пространства определяется резонансными орбитами
- Наличие особенностей потенциала в центре системы приводит к дестабилизации орбит и увеличению хаоса
- Построение самосогласованных конфигураций методом Шварцшильда требует аккуратного обращения с хаотическими орбитами и может приводить к нестационарным решениям